

Б.П.吉米多维奇

数学分析

习题全解 2

原题译自俄文第13版
最新校订本

南京大学数学系
廖良文 许宁 编著

一元函数的微分学

APG 安徽人民出版社
安徽出版集团



经典名著最新版本
全书增补数百新题
题型最全题量最大
数学名家详细解析

吉米多维奇数学分析习题全解 (一)——分析引论

吉米多维奇数学分析习题全解 (二)——一元函数的微分学

吉米多维奇数学分析习题全解 (三)——不定积分 定积分

吉米多维奇数学分析习题全解 (四)——级数

吉米多维奇数学分析习题全解 (五)——多元函数的微分学 带参数的积分

吉米多维奇数学分析习题全解 (六)——重积分和曲线积分

吉米多维奇数学分析习题全集

ISBN 978-7-212-02696-7



9 787212 026967 >

定价: 20.00 元

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析

习题全解

(二)

南京大学数学系

廖良文 许宁 编著
杨立信 译

安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全解. 2/(苏)吉米多维奇著. 廖良文, 许宁编著. —合肥: 安徽人民出版社, 2005

ISBN 978—7—212—02696—7

I. 吉… II. ①吉…②廖…③许… III. 数学分析—高等学校—解
题 IV. 017—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 113599 号

吉米多维奇数学分析习题全解(二)

(苏)吉米多维奇 著 廖良文 许 宁 编著 杨立信 译

责任编辑 王玉法 封面设计 王国亮

出版发行 安徽人民出版社

发 行 部 0551—3533258 0551—3533292(传真)
经 销 新华书店
印 刷 南京新洲印刷有限公司
开 本 880×1230 1/32 印张 14.5 字数 350 千
版 次 2010 年 1 月第 3 版(最新校订本)
标准书号 ISBN978—7—212—02696—7
定 价 20.00 元

本版图书凡印刷、装订错误可及时向安徽人民出版社调换。

前 言

数学分析是大学数学系的一门重要必修课,是学习其它数学课的基础。同时,也是理工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作,它在中国有很大影响,早在上世纪五十年代,国内就出版了该书的中译本。安徽人民出版社翻译出版了新版的吉米多维奇《数学分析习题集》,以俄文第13版(最新版本)为基础,新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题,共计有五千道习题,数量多,内容丰富,包括了数学分析的全部主题。部分习题难度较大,初学者不易解答。为了给广大高校师生提供学习参考,应安徽人民出版社的同志邀请,我们为新版的习题集作解答。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知,学习数学,做练习题是一个很重要的环节。通过做练习题,可以巩固我们所学到的知识,加深我们对基础概念的理解,还可以提高我们的运算能力,逻辑推理能力,综合分析能力。所以,我们希望读者遇到问题一定要认真思考,努力找出自己的解答,不要轻易查抄本书的解答。

廖良文编写了第一、二、三、四及八章习题的解答,许宁编写了第六、七章习题的解答。本书的编写过程中,我们参考了国内的一些数学分析教科书及已有的题解,在许多方面得到了启发,谨对原书的作者表示感谢,在此,不再一一列出。

本书自出版以来受到广大高校师生的高度肯定,深受读者喜爱,畅销不衰。此次再版,我们纠正了前一版中存在的个别错误,对版面进行了适当调整。在此对为此书付出辛勤劳动的各位老师表示深切的谢意!

由于我们水平有限,错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编 者

目 录

第二章 一元函数的微分学	(1)
§ 1. 显函数的导数	(1)
§ 2. 反函数的导数,用参数表示的函数的导数,隐函数的导数	(89)
§ 3. 导数的几何意义	(99)
§ 4. 函数的微分	(117)
§ 5. 高阶导数和微分	(128)
§ 6. 罗尔、拉格朗日和柯西定理.....	(183)
§ 7. 函数的递增、递减、不等式	(210)
§ 8. 凹凸性、拐点.....	(235)
§ 9. 未定形的求值	(248)
§ 10. 泰勒公式.....	(275)
§ 11. 函数的极值、最大值和最小值	(303)
§ 12. 依据函数的特征点作函数图形.....	(337)
§ 13. 函数的极大值与极小值问题.....	(413)
§ 14. 曲线相切、曲率圆、渐屈线.....	(438)
§ 15. 方程的近似解法.....	(452)

第二章 一元函数的微分学

§ 1. 显函数的导数

1. 导数的定义

如果 x 及 $x_1 = x + \Delta x$ 为自变量的值, 则差

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

称作函数 $y = f(x)$ 的增量.

表达式: $y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ①

若有意义, 则称为导函数, 而函数 $f(x)$ 本身在此情况下称作可微分的函数.

导数 $f'(x)$ 在几何上为函数 $y = f(x)$ 的图形在 x 点切线的斜率 [$\tan \alpha = f'(x)$]. (图 6)

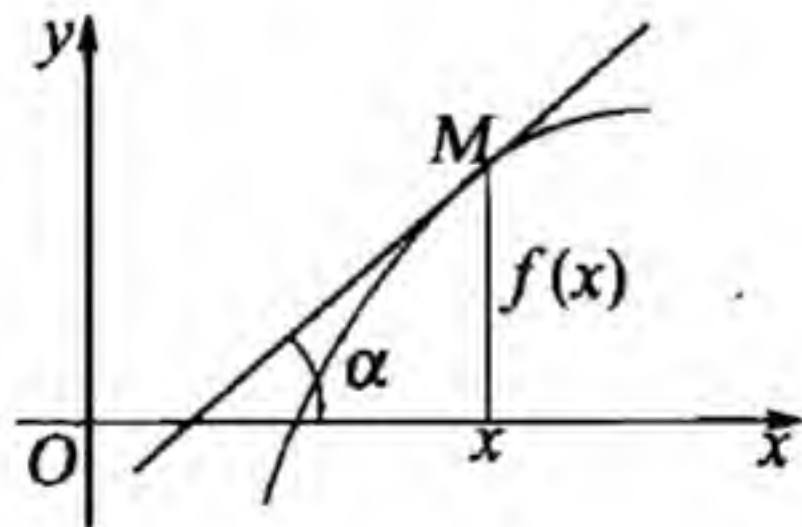


图 6

2. 求解导数的基本规则

如果 c 是常数且函数

$$u = u(x), v = v(x), w = w(x),$$

都有导数, 则

- (1) $c' = 0$;
- (2) $(cu)' = cu'$;
- (3) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;

$$(4) (uv)' = u'v + v'u;$$

$$(5) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0);$$

$$(6) (u^n)' = nu^{n-1}u' (n \text{ 为常数});$$

(7) 如果函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 都有导函数, 则

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

3. 基本公式

设 x 是自变数, 则

$$(1) (x^n)' = nx^{n-1} (n \text{ 为常数}).$$

$$(2) (\sin x)' = \cos x.$$

$$(3) (\cos x)' = -\sin x.$$

$$(4) (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(5) (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$(6) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(7) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(8) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(9) (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$(10) (a^x)' = a^x \ln a (a > 0), (e^x)' = e^x.$$

$$(11) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1);$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

$$(12) (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

$$(13) (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

$$(14) (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$(15) (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

4. 单侧导数

$$\text{表达式 } f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

$$\text{及 } f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

分别称作函数 $f(x)$ 在 x 点的左导函数或右导函数.

导数 $f'(x)$ 的存在充要条件是

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

5. 无穷导数

如果在点 x 函数 $f(x)$ 是连续的, 且

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x 有无穷的导函数. 在这种情况下函数 $y = f(x)$ 的图形在点 x 的切线与 Ox 轴垂直.

【821】 如果 x 由 1 变到 1000, 求出自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \lg x$ 的对应增量 Δy .

$$\text{解 } \Delta x = 1000 - 1 = 999,$$

$$\Delta y = \lg 1000 - \lg 1 = 3.$$

【822】 如果 x 由 0.01 变到 0.001, 求出自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 的对应增量 Δy .

$$\text{解 } \Delta x = 0.001 - 0.01 = -0.009,$$

$$\Delta y = \frac{1}{0.001} - \frac{1}{0.01} = 900.$$

【823】 若(1) $y = ax + b$;

$$(2) y = ax^2 + bx + c;$$

$$(3) y = a^x.$$

变量 x 有增量 Δx , 求出增量 Δy .

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \Delta y &= [a(x + \Delta x) + b] - [ax + b] \\ &= a\Delta x. \end{aligned}$$

$$(2) \Delta y = [a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + C] - [ax^2 + bx + C] \\ = (2ax + b)\Delta x + a(\Delta x)^2.$$

$$(3) \Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

【824】 证明: (1) $\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$;

$$(2) \Delta[f(x)g(x)] = g(x + \Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x).$$

证 (1) $\Delta[f(x) + g(x)]$
 $= [f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]$
 $= [f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)]$
 $= \Delta f(x) + \Delta g(x).$

(2) $\Delta[f(x)g(x)]$
 $= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)$
 $= [f(x + \Delta x) - f(x)]g(x + \Delta x)$
 $+ f(x)[g(x + \Delta x) - g(x)]$
 $= \Delta f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x)\Delta g(x).$

【825】 经过曲线 $y = x^2$ 上的两个点 $A(2, 4)$ 及 $A'(2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$ 引出割线 AA' , 求此割线的斜率, 若 (1) $\Delta x = 1$; (2) $\Delta x = 0.1$; (3) $\Delta x = 0.01$; (4) Δx 为任意小.

已知曲线在点 A 上的切线的斜率等于多少?

解 割线 AA' 的斜率为

$$k_{AA'} = \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = 4 + \Delta x,$$

$$(1) k_{AA'} = 5, \quad (2) k_{AA'} = 4.1,$$

$$(3) k_{AA'} = 4.01, \quad (4) k_{AA'} = 4 + \Delta x.$$

于是, 在 A 点的切线斜率为

$$k_A = \lim_{A' \rightarrow A} k_{AA'} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4,$$

【826】 利用函数 $y = x^3$ 将 Ox 轴上的线段 $1 \leq x \leq 1 + h$ 映射到 Oy 轴上. 求其平均的伸长系数. 若 (1) $h = 0.1$; (2) $h = 0.01$; (3) $h = 0.001$, 求出上述系数的值. 又当 $x = 1$ 时, 伸长系数等于多少?

解 平均伸长系数为

$$\bar{L} = \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = 3 + 3h + h^2$$

$$(1) \bar{L} = 3 + 3 \cdot (0.1) + (0.1)^2 = 3.31;$$

$$(2) \bar{L} = 3 + 3 \cdot (0.01) + (0.01)^2 = 3.0301;$$

$$(3) \bar{L} = 3 + 3 \cdot (0.001) + (0.001)^2 = 3.003001.$$

于是,在点 $x = 1$,伸长系数为

$$L|_{x=1} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{L} = \lim_{h \rightarrow 0} (3 + 3h + h^2) = 3.$$

【827】 某点沿 Ox 轴运动的规律用下式表示:

$$x = 10t + 5t^2,$$

其中 t 表时间(以秒计); x 表距离(以米计).

求出在时间 $20 \leq t \leq 20 + \Delta t$ 内某点的平均运动速度,若:

(1) $\Delta t = 1$; (2) $\Delta t = 0.1$; (3) $\Delta t = 0.01$. 计算此平均速度的值当 $t = 20$ 时其运动速度等于多少?

解 平均速度为

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{[10(20 + \Delta t) + 5(20 + \Delta t)^2] - [10 \times 20 + 5 \times 20^2]}{\Delta t} \\ &= 210 + 5\Delta t, \end{aligned}$$

$$(1) \bar{v} = 210 + 5 \times 1 = 215(\text{米/秒}),$$

$$(2) \bar{v} = 210 + 5 \times 0.1 = 210.5(\text{米/秒}),$$

$$(3) \bar{v} = 210 + 5 \times 0.01 = 210.05(\text{米/秒}),$$

于是当 $t = 20$ 时运动的速度为

$$v|_{t=20} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (210 + 5\Delta t) = 210(\text{米/秒}).$$

【828】 根据导数的定义,直接求出以下函数的导数:

(1) x^2 ; (2) x^3 ; (3) $\frac{1}{x}$; (4) \sqrt{x} ; (5) $\sqrt[3]{x}$; (6) $\tan x$; (7) $\cot x$;

(8) $\arcsin x$; (9) $\arccos x$; (10) $\arctan x$.

$$\text{解 } (1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x,$$

$$\text{于是 } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

$$(2) y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.$$

$$\begin{aligned} (3) \quad y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+\Delta x)x} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{(x+\Delta x)x} + \sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tan(x+\Delta x) - \tan x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan x + \tan \Delta x}{1 - \tan x \tan \Delta x} - \tan x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tan \Delta x (1 + \tan^2 x)}{\Delta x (1 - \tan x \tan \Delta x)} \\ &= 1 + \tan^2 x = \sec^2 x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \quad y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cot(x+\Delta x) - \cot x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan(x+\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\tan x \tan(x+\Delta x)} \\ &= -\sec^2 x \cdot \frac{1}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x. \end{aligned}$$

(8) 由三角函数公式有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\arcsin(x+\Delta x) - \arcsin x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\arcsin[(x + \Delta x) \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - (x + \Delta x)^2} \cdot x]}{\Delta x}.$$

令 $t = (x + \Delta x) \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - (x + \Delta x)^2} x$,

则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow 0$. 从而

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} \cdot \frac{(x + \Delta x) \sqrt{1 - x^2} - x \sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 (1 - x^2) - x^2 [1 - (x + \Delta x)^2]}{\Delta x [(x + \Delta x) \sqrt{1 - x^2} + x \sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}]} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + \Delta x}{(x + \Delta x) \sqrt{1 - x^2} + x \sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \end{aligned}$$

其中 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1$.

(9) 由三角函数公式, 有

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\arccos(x + \Delta x) - \arccos x}{\Delta x} \\ &= \frac{\arcsin[x \sqrt{1 - (x + \Delta x)^2} - (x + \Delta x) \sqrt{1 - x^2}]}{\Delta x}. \end{aligned}$$

令 $t = x \sqrt{1 - (x + \Delta x)^2} - (x + \Delta x) \sqrt{1 - x^2}$,

则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow 0$. 于是

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} \cdot \frac{x \sqrt{1 - (x + \Delta x)^2} - (x + \Delta x) \sqrt{1 - x^2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2x - \Delta x}{x \sqrt{1 - (x + \Delta x)^2} + (x + \Delta x) \sqrt{1 - x^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\arctan(x + \Delta x) - \arctan x}{\Delta x} \\
 &= \frac{\arctan \frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}}{\Delta x} \\
 &= \frac{\arctan \frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}} \cdot \frac{1}{1 + x(x + \Delta x)},
 \end{aligned}$$

于是 $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\arctan \frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}} \cdot \frac{1}{1 + x(x + \Delta x)} \\
 &= \frac{1}{1 + x^2},
 \end{aligned}$$

其中利用 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\tan u} = 1$.

【829】 若 $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$
求 $f'(1), f'(2), f'(3)$.

解
$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (x-2)^2(x-3)^3 + 2(x-1)(x-2)(x-3)^3 \\
 &\quad + 3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2 \\
 &= 2(x-2)(x-3)^2(3x^2 - 11x + 9).
 \end{aligned}$$

于是 $f'(1) = (-1)^2(-2)^3 = -8,$
 $f'(2) = f'(3) = 0.$

【830】 若: $f(x) = x^2 \sin(x-2)$, 求 $f'(2)$.

解 $f'(x) = 2x \sin(x-2) + x^2 \cos(x-2),$
于是 $f'(2) = 2^2 \cos 0 = 4.$

【831】 $f(x) = x + (x-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$, 求 $f'(1)$.

解 法一:

$$f'(x) = 1 + \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x}},$$

所以 $f'(1) = 1 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}.$

法二: 当 $x = 1$ 时

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \frac{\Delta x + \Delta x \arcsin \sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}}{\Delta x} \\ &= 1 + \arcsin \sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}, \end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \arcsin \sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}} \right) \\ &= 1 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

【832】 若函数 $f(x)$ 在点 a 可微分, 求 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$

解 设 $x - a = \Delta x$, 则当 $x \rightarrow a$ 时, $\Delta x \rightarrow 0$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a).$$

【833】 证明: 如果函数 $f(x)$ 可微分, 且 n 为自然数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x), \quad \textcircled{1}$$

反之, 如果对于函数 $f(x)$ 存在极限 ①, 能否断定此函数有导数?

研究狄利克雷函数的例子(参阅第一章, 题 734).

证
$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x). \end{aligned}$$

反之, $f(x)$ 不一定可导. 例如, 对于狄利赫列函数

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

在任一有理数点是不连续, 当然在这些点也不可导. 但当 x 为有理数时, $x + \frac{1}{n}$ 仍为有理数, 故

$$\chi\left(x + \frac{1}{n}\right) - \chi(x) = 1 - 1 = 0 \quad (x \text{ 为有理数}),$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\chi\left(x + \frac{1}{n}\right) - \chi(x) \right] = 0$.

利用导数表, 求下列函数的导函数(834 ~ 843).

【834】 $y = 2 + x - x^2$,

问 $y'(0)$; $y'\left(\frac{1}{2}\right)$; $y'(1)$; $y'(-10)$ 等于多少?

解 $y'(x) = 1 - 2x$,

所以 $y'(0) = 1, y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,

$$y'(1) = -1, y'(-10) = 21.$$

【835】 $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$

问 x 为何值时:

(1) $y'(x) = 0$; (2) $y'(x) = -2$; (3) $y'(x) = 10$.

解 $y'(x) = x^2 + x - 2$.

(1) 由 $y'(x) = 0$, 得

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

解之得 $x = -2$ 或 $x = 1$;

(2) 由 $y'(x) = -2$, 得

$$x^2 + x = 0.$$

解之得 $x = -1$ 或 $x = 0$,

(3) 由 $y'(x) = 10$, 得

$$x^2 + x - 12 = 0.$$

解之得 $x = -4$ 或 $x = 3$.

【836】 $y = a^5 + 5a^3x^2 - x^5.$

解 $y' = 10a^3x - 5x^4.$

【837】 $y = \frac{ax+b}{a+b}.$

解 $y' = \frac{a}{a+b}.$

【838】 $y = (x-a)(x-b).$

解 $y' = (x-b) + (x-a) = 2x - (a+b).$

【839】 $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3.$

解 $y' = (x+2)^2(x+3)^3 + 2(x+1)(x+2)(x+3)^3$
 $+ 3(x+1)(x+2)^2(x+3)^2$
 $= (x+2)(x+3)^2[(x+2)(x+3)$
 $+ 2(x+1)(x+3) + 3(x+1)(x+2)]$
 $= 2(x+2)(x+3)^2(3x^2 + 11x + 9).$

【840】 $y = (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha).$

解 $y' = \sin\alpha(x\cos\alpha - \sin\alpha) + (x\sin\alpha + \cos\alpha)\cos\alpha$
 $= x\sin 2\alpha + \cos 2\alpha.$

【841】 $y = (1+nx^m)(1+mx^n).$

解 $y' = mx^{m-1}(1+mx^n) + (1+nx^m)n \cdot mx^{n-1}$
 $= mn[x^{m-1} + x^{n-1} + (n+m)x^{n+m-1}].$

【842】 $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3.$

解 $y' = -(1-x^2)^2(1-x^3)^3 - 4x(1-x)(1-x^2)(1-x^3)^3$
 $- 9x^2(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2$
 $= -(1-x^2)(1-x^3)^2(1-x)^2(1+6x+15x^2+14x^3)$
 $= -(1-x)^5(1+x)(1+2x) \cdot$
 $(1+4x+7x^2)(1+x+x^2)^2.$

【842. 1】 $y = (5+2x)^{10}(3-4x)^{20}.$

解 $y' = 20(5+2x)^9(3-4x)^{20} - 80(5+2x)^{10}(3-4x)^{19}$
 $= 20(5+2x)^9(3-4x)^{19} \cdot [3-4x-4(5+2x)]$
 $= -20(12x+17)(5+2x)^9(3-4x)^{19}.$

【843】 $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}.$

解 $y' = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4}\right) \quad (x \neq 0).$

【844】 证明公式:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

证
$$\begin{aligned} \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' &= \frac{(ax+b)'(cx+d) - (ax+b)(cx+d)'}{(cx+d)^2} \\ &= \frac{a(cx+d) - (ax+b) \cdot c}{(cx+d)^2} \\ &= \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2} \quad (cx+d \neq 0). \end{aligned}$$

求下列函数的导数(845 ~ 871).

【845】 $y = \frac{2x}{1-x^2}.$

解
$$\begin{aligned} y' &= \frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \quad (x \neq \pm 1). \end{aligned}$$

【846】 $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}.$

解
$$y' = \left[\frac{2}{1-x+x^2} - 1 \right]' = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}.$$

【847】 $y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}.$

解
$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1-x)^2(1+x)^3 - x[3(1-x)^2(1+x)^2 - 2(1-x)(1+x)^3]}{(1-x)^4(1+x)^6} \\ &= \frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4} \quad (x \neq \pm 1). \end{aligned}$$

【848】 $y = \frac{(2-x^2)(2-x^3)}{(1-x)^2}.$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{[-2x(2-x^3)-3x^2(2-x^2)](1-x)^2+2(2-x^2)(2-x^3)(1-x)}{(1-x)^4} \\ &= \frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3} \quad (x \neq 1).\end{aligned}$$

$$\text{【849】 } y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{-p(1-x)^{p-1}(1+x)^q - q(1-x)^p(1+x)^{q-1}}{(1+x)^{2q}} \\ &= -\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q) + (p-q)x]}{(1+x)^{q+1}} \quad (x \neq -1).\end{aligned}$$

$$\text{【850】 } y = \frac{x^p(1-x)^q}{1+x}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{[px^{p-1}(1-x)^q - qx^p(1-x)^{q-1}](1+x) - x^p(1-x)^q}{(1+x)^2} \\ &= \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2} [p - (q+1)x - (p+q-1)x^2] \\ &\quad (x \neq -1).\end{aligned}$$

$$\text{【851】 } y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}.$$

$$\text{解 } y' = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \quad (x > 0).$$

$$\text{【852】 } y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$\text{解 } y' = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\right) \quad (x > 0).$$

$$\text{【853】 } y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

$$\text{【854】 } y = x\sqrt{1+x^2}.$$

$$\text{解 } y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{【855】 } y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \sqrt{2+x^2} \sqrt[3]{3+x^3} \\
 &\quad + (1+x) \left[\frac{x \sqrt[3]{3+x^3}}{\sqrt{2+x^2}} + \frac{x^2 \sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{(3+x^3)^2}} \right] \\
 &= \frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt[3]{(3+x^3)^2}} \quad (x \neq \sqrt[3]{-3}).
 \end{aligned}$$

$$\text{【856】 } y = \sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{-m(1-x)^{m-1}(1+x)^n + n(1-x)^m(1+x)^{n-1}}{(m+n) \sqrt[m+n]{[(1-x)^n(1+x)^m]^{m+n-1}}} \\
 &= \frac{(n-m) - (n+m)x}{(m+n) \sqrt[m+n]{(1-x)^n(1+x)^m}} \quad (x \neq \pm 1).
 \end{aligned}$$

$$\text{【857】 } y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} \\
 &= \frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} \quad (|x| < |a|).
 \end{aligned}$$

$$\text{【858】 } y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2}} \cdot \frac{3x^2(1-x^3) + 3x^2(1+x^3)}{(1-x^3)^2} \\
 &= \frac{2x^2}{1-x^6} \cdot \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \quad (x \neq \pm 1).
 \end{aligned}$$

$$\text{【859】 } y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= -\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2}) + \sqrt{1+x^2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{(1+x^2)(x+\sqrt{1+x^2})^2} \\
 &= -\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.
 \end{aligned}$$

【860】 $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

解
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right]$$

$$= \frac{1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}{8\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}.$$

【861】 $y = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}$.

解
$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}})^2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{x})^2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{1}{27\sqrt[3]{x^2(1 + \sqrt[3]{x})^2(1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}})^2}}$$

($x \neq 0, -1, -8$).

【862】 $y = \cos 2x - 2\sin x$.

解 $y' = -2\sin 2x - 2\cos x = -2\cos x(1 + 2\sin x)$.

【863】 $y = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x$.

解
$$y' = -2x\cos x - (2 - x^2)\sin x + 2\sin x + 2x\cos x$$

$$= x^2\sin x.$$

【864】 $y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$.

解
$$y' = -2\sin x \cos x \cos(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$$

$$- 2\sin x \cos x \sin(\cos^2 x) \cdot \sin(\sin^2 x)$$

$$= -\sin 2x \cos(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= -\sin 2x \cos(\cos 2x).$$

【865】 $y = \sin^n x \cos nx$.

解
$$y' = n\sin^{n-1} x \cdot \cos x \cdot \cos nx - n\sin^n x \sin nx$$

$$= n\sin^{n-1} x (\cos x \cos nx - \sin x \sin nx)$$

$$= n\sin^{n-1} x \cos(n+1)x.$$

【866】 $y = \sin[\sin(\sin x)]$.

解 $y' = \cos x \cos(\sin x) \cdot \cos[\sin(\sin x)]$

$$\text{【867】 } y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{2\sin x \cos x \cdot \sin x^2 - 2x \cdot \sin x^2 \cdot \sin^2 x}{\sin^4 x^2} \\ &= \frac{2\sin x (\cos x \cdot \sin x^2 - x \sin x \cdot \sin x^2)}{\sin^4 x^2} \\ &\quad (x^2 \neq k\pi, k = 0, +1, +2, \dots). \end{aligned}$$

$$\text{【868】 } y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{-2\sin^3 x - 4\sin x \cos^2 x}{4\sin^4 x} = -\frac{1 + \cos^2 x}{2\sin^3 x} \\ &\quad (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \dots). \end{aligned}$$

$$\text{【869】 } y = \frac{1}{\cos^n x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= -\frac{n \cos^{n-1} x \cdot \sin x}{\cos^{2n} x} = \frac{n \sin x}{\cos^{n+1} x} \\ &\quad \left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right). \end{aligned}$$

$$\text{【870】 } y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{(\cos x + x \sin x)^2} \\ &\quad \cdot [(\cos x - \cos x + x \sin x)(\cos x + x \sin x) \\ &\quad - (\sin x - x \cos x) \cdot (-\sin x + \sin x + x \cos x)] \\ &= \frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{【871】 } y = \tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \csc^2 \frac{x}{2} = \frac{2}{\sin^2 x} \\ &\quad (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

$$\text{【872】 } y = \tan x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x.$$

$$\text{解 } y' = \sec^2 x - \tan^2 x \sec^2 x + \tan^4 x \sec^2 x$$

$$= 1 + \tan^6 x \quad \left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \dots\right).$$

【873】 $y = 4 \sqrt[3]{\cot^2 x} + \sqrt[3]{\cot^8 x}.$

解 $y' = \frac{8}{3}(\cot x)^{-\frac{1}{3}}(-\csc^2 x) + \frac{8}{3}(\cot x)^{\frac{5}{3}}(-\csc^2 x)$

$$= -\frac{8}{3\sin^4 x \sqrt[3]{\cot x}}$$

$$\left(x \neq k\pi, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right).$$

【874】 $y = \sec^2 \frac{x}{a} + \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{a}.$

解 $y' = \frac{2}{a} \sec^2 \frac{x}{a} \tan \frac{x}{a} - \frac{2}{a} \csc^2 \frac{x}{a} \cot \frac{x}{a}$

$$= \frac{2}{a} \left[\frac{\sin \frac{x}{a}}{\cos^3 \frac{x}{a}} - \frac{\cos \frac{x}{a}}{\sin^3 \frac{x}{a}} \right] = \frac{2}{a} \cdot \frac{\sin^4 \frac{x}{a} - \cos^4 \frac{x}{a}}{\sin^3 \frac{x}{a} \cos^3 \frac{x}{a}}$$

$$= \frac{2}{a} \frac{\sin^2 \frac{x}{a} - \cos^2 \frac{x}{a}}{\sin^3 \frac{x}{a} \cos^3 \frac{x}{a}} = \frac{-16 \cos \frac{2x}{a}}{a \sin^3 \frac{2x}{a}}$$

$$\left(x \neq \frac{k\pi a}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right).$$

【875】 $y = \sin[\cos^2(\tan^3 x)].$

解 $y' = \cos[\cos^2(\tan^3 x)] \cdot [-2\cos(\tan^3 x) \cdot \sin(\tan^3 x)]$

$$\cdot [3\tan^2 x \cdot \sec^2 x]$$

$$= -3\tan^2 x \sec^2 x \cdot \sin(2\tan^3 x) \cdot \cos[\cos^2(\tan^3 x)]$$

$$\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right).$$

【876】 $y = e^{-x^2}.$

解 $y' = -2xe^{-x^2}.$

【877】 $y = 2^{\tan \frac{1}{x}}.$

解 $y' = -\frac{1}{x^2} \cdot \sec^2 \frac{1}{x} \cdot 2^{\tan \frac{1}{x}} \cdot \ln 2$

$$\left\{ x \neq 0, x \neq \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}.$$

【878】 $y = e^x(x^2 - 2x + 2).$

解 $y' = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) = x^2 e^x.$

【879】 $y = \left[\frac{1-x^2}{2} \sin x - \frac{(1+x)^2}{2} \cos x \right] e^{-x}.$

解 $y' = \left[-x \sin x + \frac{1-x^2}{2} \cos x \right. \\ \left. - (1+x) \cos x + \frac{(1+x)^2}{2} \sin x \right] e^{-x} \\ - \left[\frac{1-x^2}{2} \sin x - \frac{(1+x)^2}{2} \cos x \right] e^{-x} \\ = x^2 e^{-x} \sin x.$

【880】 $y = e^x \left(1 + \cot \frac{x}{2} \right).$

解 $y' = e^x \left(1 + \cot \frac{x}{2} \right) + e^x \cdot \left(-\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} \right) \\ = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}$

$$(x \neq 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

【881】 $y = \frac{\ln 3 \cdot \sin x + \cos x}{3^x}.$

解 $y' = \frac{3^x (\ln 3 \cdot \cos x - \sin x) - 3^x \ln 3 \cdot (\ln 3 \cdot \sin x + \cos x)}{3^{2x}} \\ = -\frac{(1 + \ln^2 3) \sin x}{3^x}.$

【882】 $y = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{ax} [a(a \sin bx - b \cos bx) \\ + (ab \cos bx + b^2 \sin bx)] \\ = \sqrt{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx.$

【883】 $y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}.$

解 $y' = e^x(1 + e^{e^x} + e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x})$
 $= e^x[1 + e^{e^x}(1 + e^{e^{e^x}})].$

【884】 $y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b \quad (a > 0, b > 0).$

解 两边取对数, 得

$$\ln y = x \ln \frac{a}{b} + a(\ln b - \ln x) + b(\ln x - \ln a),$$

上式两边对 x 求导数得

$$\frac{y'}{y} = \ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}.$$

所以 $y' = y \left(\ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right)$
 $= \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^b \left(\ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right).$

【885】 $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x} \quad (a > 0).$

解 $y' = a^a x^{a^a-1} + a x^{a-1} a^{x^a} \ln a + a^x \cdot a^{a^x} \ln^2 a.$

【886】 $y = \lg^3 x^3.$

解 $y' = 3 \lg^2 x^3 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 \cdot \lg e = \frac{9}{x} \lg e \cdot \lg^2 x^3 (x \neq 0).$

【887】 $y = \ln(\ln(\ln x)).$

解 $y' = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} \quad (x > e).$

【888】 $y = \ln(\ln^2(\ln^3 x)).$

解 $y' = \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2 \ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$
 $= \frac{6}{x \ln x \ln(\ln^3 x)} (x > e).$

【889】 $y = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2(1+x)}.$

解 $y' = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} - \frac{1}{4} \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2(1+x)^2}$

$$= \frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)} \quad (x > -1).$$

【890】 $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}.$

解 $y' = \frac{1}{4} [\ln(x^2-1) - \ln(x^2+1)]'$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1} \right)$$

$$= \frac{x}{x^4-1} \quad (|x| > 1).$$

【891】 $y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{1+x^4}.$

解 $y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \ln|x| - \frac{1}{4} \ln(1+x^4),$

所以 $y' = -\frac{4x^3}{4(1+x^4)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \frac{4x^3}{1+x^4}$

$$= \frac{1}{x(1+x^4)^2} \quad (x \neq 0).$$

【892】 $y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$

解 $y = \frac{1}{2\sqrt{6}} [\ln|x\sqrt{3}-\sqrt{2}| - \ln|x\sqrt{3}+\sqrt{2}|],$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left[\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{3x^2-2} \quad \left(|x| > \sqrt{\frac{2}{3}} \right).$$

【893】 $y = \frac{1}{1-k} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{\sqrt{k}}{1-k} \ln \frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}$

$$(0 < k < 1).$$

解 $y = \frac{1}{1-k} [\ln|1+x| - \ln|1-x|]$

$$- \frac{\sqrt{k}}{1-k} [\ln|1+x\sqrt{k}| - \ln|1-x\sqrt{k}|],$$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{1-k} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) \\
 &\quad - \frac{\sqrt{k}}{1-k} \left(\frac{\sqrt{k}}{1+x\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}} \right) \\
 &= \frac{2}{(1-x^2)(1-kx^2)} \quad (|x| < 1).
 \end{aligned}$$

【894】 $y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1}).$

解 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$
 $= \frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})} \quad (x > -1).$

【895】 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$

解 $y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$

【896】 $y = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}.$

解 $y' = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + x \cdot \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$
 $- \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
 $= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
 $= \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$

【897】 $y = x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x.$

解 $y' = \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) + x \cdot \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
 $- \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \cdot$
 $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 2$
 $= \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}).$

【898】 $y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}).$

解 $y' = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{x^2}{2 \sqrt{x^2 + a^2}}$
 $+ \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)$
 $= \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{x^2}{2 \sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{a^2}{2 \sqrt{x^2 + a^2}}$
 $= \sqrt{x^2 + a^2}.$

【899】 $y = \frac{1}{2 \sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x \sqrt{b}}{\sqrt{a} - x \sqrt{b}} \quad (a > 0, b > 0).$

解 $y' = \frac{1}{2 \sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + x \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x \sqrt{b}} \right)$
 $= \frac{1}{a - bx^2} \quad \left(|x| < \sqrt{\frac{a}{b}} \right).$

【900】 $y = \frac{2 + 3x^2}{x^4} \sqrt{1 - x^2} + 3 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}.$

解 $y' = \frac{6x \cdot x^4 - (2 + 3x^2) \cdot 4x^3}{x^8} \sqrt{1 - x^2}$
 $+ \frac{2 + 3x^2}{x^4} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} + 3 \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{3}{x}$
 $= -\frac{8}{x^5 \sqrt{1 - x^2}} \quad (0 < |x| < 1).$

【901】 $y = \ln \tan \frac{x}{2}.$

解 $y' = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$

$(0 < x - 2k\pi < \pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

【902】 $y = \ln \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$

解 $y' = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \sec^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$
 $= \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x}$

$$(|x - 2k\pi| < \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

【903】 $y = \frac{1}{2}\cot^2 x + \ln \sin x.$

解 $y' = -\cot x \cdot \csc^2 x + \frac{\cos x}{\sin x}$
 $= -\cot x(\csc^2 x - 1) = -\cot^3 x$
 $(0 < x - 2k\pi < \pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

【904】 $y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}.$

解 $y' = \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos x}{1 - \sin x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right)$
 $= \frac{-2\cos x}{2(1 - \sin^2 x)} = -\frac{1}{\cos x}$
 $\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right).$

【905】 $y = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \ln \sqrt{\frac{1 + \cos x}{\sin x}}.$

解 $y' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-\sin^3 x - 2\sin x \cdot \cos^2 x}{\sin^4 x}$
 $+ \frac{1}{2} \left(\frac{-\sin x}{1 + \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right)$
 $= \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$

$$(0 < x - 2k\pi < \pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$\text{【906】 } y = \ln \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{a + b \cos x}$$

$$(0 \leq |a| < |b|).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{-a \sin x + \sqrt{b^2 - a^2} \cos x}{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x} + \frac{b \sin x}{a + b \cos x} \\ &= \frac{b \sqrt{b^2 - a^2} + a \sqrt{b^2 - a^2} \cos x + (b^2 - a^2) \sin x}{(b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x)(a + b \cos x)} \\ &= \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a + b \cos x}. \end{aligned}$$

$$\text{【907】 } y = \frac{1}{x} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= -\frac{1}{x^2} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6) \\ &\quad + \frac{1}{x} \left[\frac{3}{x} \ln^2 x + \frac{6}{x} \ln x + \frac{6}{x} \right] \\ &= -\frac{\ln^3 x}{x^2} \quad (x > 0). \end{aligned}$$

$$\text{【908】 } y = \frac{1}{4x^4} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= -\frac{1}{x^5} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^5} + \frac{1}{4x^5} \\ &= \frac{\ln x}{x^5} \quad (x > 0). \end{aligned}$$

$$\text{【909】 } y = \frac{3}{2} (1 - \sqrt[3]{1+x^2}) + 3 \ln(1 + \sqrt[3]{1+x^2}).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{3}{2} \cdot 2(1 - \sqrt[3]{1+x^2}) \cdot \left(-\frac{2x}{3 \sqrt[3]{(1+x^2)^2}} \right) \\ &\quad + 3 \cdot \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1+x^2}} \cdot \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(1+x^2)^2}} \\ &= \frac{2x}{1 + \sqrt[3]{1+x^2}}. \end{aligned}$$

【910】 $y = \ln\left[\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}\right)\right].$

解 $y' = \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)\right)$
 $= -\frac{1 + x + \frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}}{\left(1 + x\ln\frac{1}{x}\right)\left[1 + x\ln\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}\right)\right]} (x > 0).$

【911】 $y = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)].$

解 $y' = \sin(\ln x) - \cos(\ln x)$
 $+ x\left[\frac{1}{x}\cos(\ln x) + \frac{1}{x}\sin(\ln x)\right]$
 $= 2\sin(\ln x) \quad (x > 0).$

【912】 $y = \ln \tan \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \tan x.$

解 $y' = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + \sin x \ln \tan x - \cos x \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x$
 $= \sin x \cdot \ln \tan x$
 $\left(0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right).$

【913】 $y = \arcsin \frac{x}{2}.$

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \quad (|x| < 2).$

【914】 $y = \arccos \frac{1-x}{\sqrt{2}}.$

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} \quad (|x-1| < \sqrt{2}).$$

【915】 $y = \arctan \frac{x^2}{a}.$

解 $y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2}{a}\right)^2} \cdot \frac{2x}{a} = \frac{2ax}{a^2 + x^4} \quad (a \neq 0).$

【916】 $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{2}}{x}.$

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)$
 $= \frac{1}{x^2 + 2} \quad (x \neq 0).$

【917】 $y = \sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}.$

解 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 $= \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} \quad (x \geq 0).$

【918】 $y = x + \sqrt{1-x^2} \cdot \arccos x.$

解 $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arccos x + \sqrt{1-x^2} \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$
 $= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x \quad (|x| < 1).$

【919】 $y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x}.$

解 $y' = \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \frac{x}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$
 $+ \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$= \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \quad (x \geq 0).$$

【920】 $y = \arccos \frac{1}{x}.$

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$= \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1).$$

【921】 $y = \arcsin(\sin x).$

解 $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \operatorname{sgn}(\cos x)$

$$\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right).$$

【922】 $y = \arccos(\cos^2 x).$

解 $y' = \frac{2 \cdot \cos x \sin x}{\sqrt{1-\cos^4 x}} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{\sin^2 x (1+\cos^2 x)}}$

$$= 2 \operatorname{sgn}(\sin x) \frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

$$(x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

【923】 $y = \arcsin(\sin x - \cos x).$

解 $y' = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{1-(\sin x - \cos x)^2}} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$

$$\left(0 < x - k\pi < \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \dots\right).$$

【924】 $y = \arccos \sqrt{1-x^2}.$

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < |x| < 1).$$

【925】 $y = \arctan \frac{1+x}{1-x}.$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{(1-x) + (1+x)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} \quad (x \neq 1).\end{aligned}$$

$$\text{【926】 } y = \operatorname{arccot} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right).$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= -\frac{1}{1 + \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)^2} \\ &\quad \cdot \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= 1 \quad \left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right).\end{aligned}$$

$$\text{【927】 } y = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) \quad (a > b \geq 0).$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a-b}{a+b} \cdot \tan^2 \frac{x}{2}} \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{a + b \cos x}.\end{aligned}$$

$$\text{【928】 } y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1+x^2}{\sqrt{4x^2}} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = -2 \frac{\operatorname{sgn} x}{1+x^2} \quad (x \neq 0).\end{aligned}$$

$$\text{【929】 } y = \frac{1}{\arccos^2(x^2)}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= -\frac{2}{\arccos^3(x^2)} \cdot \frac{-2x}{(1-x^4)} \\ &= \frac{4x}{\sqrt{1-x^4} \cdot \arccos^3(x^2)} \quad (|x| < 1).\end{aligned}$$

【930】 $y = \arctan x + \frac{1}{3} \arctan(x^3).$

解 $y' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{1+(x^3)^2} \cdot 3x^2 = \frac{1+x^4}{1+x^6}.$

【931】 $y = \ln(1 + \sin^2 x) - 2\sin x \cdot \arctan(\sin x).$

解 $y' = \frac{2\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} - 2\cos x \cdot \arctan(\sin x)$
 $- 2\sin x \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} = -2\cos x \arctan(\sin x).$

【932】 $y = \ln\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$

解 $y' = \frac{1}{\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$
 $= \frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \quad (x > 1).$

【933】 $y = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b} \arctan \frac{x}{b} \quad (b \neq 0).$

解 $y' = \frac{1}{x+a} - \frac{x}{x^2+b^2} + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2} \cdot \frac{1}{b}$
 $= \frac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)} \quad (x > -a).$

【934】 $y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0).$

解 $y' = \frac{1}{2} \sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a}$
 $= \sqrt{a^2-x^2} \quad (|x| < a).$

【935】 $y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{1+x^3} \quad (x \neq -1).\end{aligned}$$

$$\text{【936】 } y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} - \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{1 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{2}(x^2 - 1) - x\sqrt{2} \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^4} \quad (x \neq \pm 1).\end{aligned}$$

$$\text{【937】 } y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= (\arcsin x)^2 + 2x \cdot \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\quad - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2 \\ &= (\arcsin x)^2 \quad (|x| < 1).\end{aligned}$$

$$\text{【938】 } y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arccos x}{x^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - \sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1 + \sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right] \\ &= -\frac{\arccos x}{x^2} \quad (0 < |x| < 1).\end{aligned}$$

$$\text{【939】 } y = \arctan \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{1 + (\sqrt{x^2 - 1})^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \\
 &\quad - \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{x \ln x}{(x^2 - 1) \sqrt{x^2 - 1}} \\
 &= \frac{x \ln x}{(x^2 - 1) \sqrt{x^2 - 1}} \quad (x > 1).
 \end{aligned}$$

$$\text{【940】 } y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - x}{1 + x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{1 - x^2} + \frac{x \arcsin x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{1 - x} - \frac{1}{1 + x} \right] \\
 &= \frac{x \arcsin x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (|x| < 1).
 \end{aligned}$$

$$\text{【941】 } y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{12} \left(\frac{4x^3 - 2x}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{4x}{x^2 + 1} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1} \right)^2} \left[\frac{-4\sqrt{3}x}{(2x^2 - 1)^2} \right] \\
 &= \frac{x^3}{1 + x^6} \quad \left(|x| \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \right).
 \end{aligned}$$

$$\text{【942】 } y = \frac{x^6}{1 + x^{12}} - \operatorname{arccot} x^6.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{6x^5(1 + x^{12}) - x^6 \cdot 12x^{11}}{(1 + x^{12})^2} + \frac{1}{1 + x^{12}} \cdot 6x^5 \\
 &= \frac{12x^5}{(1 + x^{12})^2}.
 \end{aligned}$$

$$\text{【943】 } y = \ln \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}} + \sqrt{3} \arctan \frac{1 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{解 } y' = -\frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2} (1 - \sqrt[3]{x})}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}} \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right) \\
 & + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{1+\left[\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}\right]^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \\
 & = -\frac{1}{(1-x)\sqrt[3]{x}} \quad (0 < |x| < 1).
 \end{aligned}$$

【944】 $y = \arctan \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$

解 $y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1+\sqrt{1-x^2})^2}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$$

【945】 $y = \operatorname{arccot} \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}} \quad (a > 0).$

解 $y' = -\frac{1}{1+\left(\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}\right)^2}$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{ax-x^2}-\frac{(a-2x)^2}{2\sqrt{ax-x^2}}}{(ax-x^2)} \\
 & = \frac{1}{\sqrt{ax-x^2}} \quad (0 < x < a).
 \end{aligned}$$

【946】 $y = \frac{3-x}{2} \sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin \frac{1+x}{\sqrt{2}}.$

解 $y' = -\frac{1}{2} \sqrt{1-2x-x^2} - \frac{3-x}{2} \cdot \frac{1+x}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

$$+ 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{\sqrt{2}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} \quad (|x+1| < \sqrt{2}).$$

【947】 $y = \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} - \frac{1}{2} \arctan \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$

解 $y' = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4} + x} \left[1 + \frac{x^3}{\sqrt{(1+x^4)^3}} \right] \right.$
 $\left. - \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} \left[\frac{x^3}{\sqrt{(1+x^4)^3}} - 1 \right] \right\}$
 $- \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} \right)^2}$
 $\cdot \frac{1}{x^2} \left[\frac{x^4}{\sqrt{(1+x^4)^3}} - \sqrt[4]{1+x^4} \right]$
 $= \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} \quad (x \neq 0).$

【948】 $y = \arctan(\tan^2 x).$

解 $y' = \frac{1}{1 + \tan^4 x} 2 \tan x \cdot \sec^2 x = \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$
 $\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right).$

【949】 $y = \sqrt{1-x^2} \cdot \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$
 $+ \sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$

解 $y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
 $+ \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} \left(-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$
 $+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right.$
 $\left. + \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right] - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \\
 &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}
 \end{aligned}$$

$$(0 < |x| < 1).$$

【950】 $y = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} (\arctan x)^2.$

解 $y' = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} - \arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2}$
 $= \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x.$

【951】 $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}).$

解 $y' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} \left(e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}} \right) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$

【952】 $y = \arctan(x + \sqrt{1+x^2}).$

解 $y' = \frac{1}{1+(x+\sqrt{1+x^2})^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$
 $= \frac{1}{2(1+x^2)}.$

【953】 $y = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha \sin x}{1 - \cos \alpha \cos x}\right).$

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin \alpha \sin x}{1 - \cos \alpha \cos x}\right)^2}}$
 $\cdot \frac{\sin \alpha \cos x (1 - \cos \alpha \cos x) - \sin \alpha \sin x \cdot \cos \alpha \sin x}{(1 - \cos \alpha \cos x)^2}$
 $= \frac{1 - \cos \alpha \cos x}{\sqrt{(\cos x - \cos \alpha)^2}} \cdot \frac{\sin \alpha (\cos x - \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha \cos x)^2}$
 $= \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha \cos x} \operatorname{sgn}(\cos x - \cos \alpha)$

($\cos x \neq \cos \alpha$, 即 $x \neq \alpha + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

$$\text{【954】 } y = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \arctan \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{3}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{3} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + \sqrt{3} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x^2+2}{x^2}} \cdot \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2}}{x^2} \\ &= \frac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}} \quad (0 < |x| < 1). \end{aligned}$$

$$\text{【955】 } y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{1 + \frac{2x^2}{1+x^4}} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+x^4} - \frac{2\sqrt{2}x^4}{\sqrt{1+x^4}}}{(1+x^4)} \\ &\quad - \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}} \left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} - \sqrt{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}} \left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} + \sqrt{2} \right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} \quad (x \neq \pm 1). \end{aligned}$$

$$\text{【956】 } y = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arccot} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{(1+x^2)^2} \left[\left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) (1+x^2) - 2x^2 \sqrt{1-x^2} \right] \\ &\quad + \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{1}{\left(1 + \frac{2x^2}{1-x^2} \right)} \cdot \frac{\sqrt{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{(x^2 + 1)^2 \sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1).$$

【957】 $y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2).$

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (\sin x^2 - \cos x^2)^2}} \cdot 2x(\cos x^2 + \sin x^2)$
 $= \frac{2x(\cos x^2 + \sin x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}.$

$$\left(\sqrt{k\pi} < |x| < \sqrt{k\pi + \frac{\pi}{2}}; k = 0, 1, 2, \dots \right).$$

【958】 $y = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2).$

解 $y' = \frac{2x \cos x^2}{\sqrt{1 - \sin^2 x^2}} + \frac{2x \sin x^2}{\sqrt{1 - \cos^2 x^2}}$
 $= 2x[\operatorname{sgn}(\cos x^2) + \operatorname{sgn}(\sin x^2)]$
 $\left(|x| \neq \sqrt{\frac{k\pi}{2}}; k = 0, 1, 2, \dots \right).$

【959】 $y = e^{\operatorname{arcsin} x} [\cos(\operatorname{arcsin} x) + \sin(\operatorname{arcsin} x)].$

解 $y' = e^{\operatorname{arcsin} x} \left\{ \frac{m}{\sqrt{1 - x^2}} [\cos(\operatorname{arcsin} x) + \sin(\operatorname{arcsin} x)] \right.$
 $\left. + \frac{m}{\sqrt{1 - x^2}} [\cos(\operatorname{arcsin} x) - \sin(\operatorname{arcsin} x)] \right\}$
 $= \frac{2m}{\sqrt{1 - x^2}} e^{\operatorname{arcsin} x} \cdot \cos(\operatorname{arcsin} x) \quad (|x| < 1).$

【960】 $y = \operatorname{arctan} e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}}.$

解 $y' = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} \right) = \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1}.$

【960. 1】 $y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}}.$

解 $y' = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}}} \cdot \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{1 + x^4})^2}}$
 $\cdot \frac{1}{4} \frac{4x^3}{\sqrt[4]{(1 + x^4)^3}}$

$$= \frac{1}{6} \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3} \cdot \sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{1+x^4})^2} \cdot \sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}}$$

【960. 2】 $y = \operatorname{arccot} \frac{1}{\sqrt{\cot \frac{1}{x^2}}}$

解 $y' = \frac{1}{1 + \frac{1}{\cot \frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\left(\cot \frac{1}{x^2}\right)^{3/2}} \cdot \csc^2 \frac{1}{x^2} \left(\frac{-2}{x^3}\right)$

$$= \frac{1}{x^3 \sin \frac{1}{x^2} \left(\sin \frac{1}{x^2} + \cos \frac{1}{x^2}\right)} \sqrt{\tan \frac{1}{x^2}}$$

$$\left(x \neq 0, |x| \neq \sqrt{\frac{k\pi}{2}}, k = 0, 1, 2, \dots\right).$$

【960. 3】 $y = \ln^2(\sec 2^{\sqrt[3]{x}})$.

解 $y' = 2\ln(\sec 2^{\sqrt[3]{x}}) \cdot \frac{1}{\sec 2^{\sqrt[3]{x}}} \cdot \sec(2^{\sqrt[3]{x}}) \cdot \tan(2^{\sqrt[3]{x}}) \cdot \frac{2^{\sqrt[3]{x}}}{3\sqrt[3]{x^2}} \ln 2$

$$= \frac{2\ln 2 \cdot 2^{\sqrt[3]{x}} \ln(\sec 2^{\sqrt[3]{x}}) \cdot \tan(2^{\sqrt[3]{x}})}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\left(-\frac{\pi}{4} < 2^{\sqrt[3]{x}} - k\pi < \frac{\pi}{4}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right).$$

【961】 $y = x + x^x + x^{x^x} \quad (x > 0)$.

解 设 $z = x^x$, 则

$$\ln z = x \ln x,$$

从而 $\frac{z'}{z} = \ln x + 1,$

即 $z' = x^x (\ln x + 1),$

所以 $(x^x)' = x^x (\ln x + 1).$

同样, 设 $u = x^{x^x}$, 则 $\ln u = x^x \ln x,$

从而 $\frac{u'}{u} = (x^x)' \ln x + x^x \cdot \frac{1}{x} = x^x (\ln x + 1) \ln x + x^x \frac{1}{x}$

$$= x^x \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right),$$

即 $u' = x^{x'} \cdot x^x \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right),$

所以 $(x^{x'})' = x^x \cdot x^{x'} \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right).$

因此 $y' = 1 + (x^x)' + (x^{x'})'$
 $= 1 + x^x(1 + \ln x) + x^x \cdot x^{x'} \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right).$

【962】 $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x} \quad (a > 0, x > 0).$

解 设 $z = x^{x^a}$, 则 $\ln z = x^a \ln x$,

从而 $\frac{z'}{z} = ax^{a-1} \ln x + x^a \cdot \frac{1}{x},$

即 $(x^{x^a})' = x^{x^a} \cdot x^{a-1}(a \ln x + 1),$

设 $u = x^{a^x}$, 则 $\ln u = a^x \ln x$,

从而 $\frac{u'}{u} = a^x \ln a \cdot \ln x + \frac{a^x}{x},$

即 $(x^{a^x})' = x^{a^x} \cdot a^x \left(\frac{1}{x} + \ln a \cdot \ln x \right).$

同样 $(a^{x^x})' = a^{x^x} \cdot x^x \cdot \ln a (1 + \ln x),$

因此 $y' = x^{x^a} \cdot x^{a-1}(1 + a \ln x) + x^{a^x} \cdot a^x \left(\frac{1}{x} + \ln a \cdot \ln x \right)$
 $+ a^{x^x} \cdot x^x \cdot \ln a \cdot (1 + \ln x).$

【963】 $y = \sqrt[x]{x} \quad (x > 0).$

解 $y' = (e^{\frac{1}{x} \ln x})' = e^{\frac{1}{x} \ln x} \left(-\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2} \right)$
 $= x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} (1 - \ln x) = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x).$

【964】 $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}.$

解 设 $z = (\sin x)^{\cos x}$, 则

$$\ln z = \cos x \ln(\sin x).$$

从而 $\frac{z'}{z} = -\sin x \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x},$

即 $[(\sin x)^{\cos x}]' = (\sin x)^{\cos x+1} [\cot^2 x - \ln(\sin x)].$

同样 $[(\cos x)^{\sin x}]'$
 $= (\cos x)^{\sin x} \left[\cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right]$
 $= -(\cos x)^{\sin x+1} [\tan^2 x - \ln(\cos x)].$

从而 $y' = (\sin x)^{\cos x+1} [\cot^2 x - \ln(\sin x)]$
 $- (\cos x)^{\sin x+1} [\tan^2 x - \ln(\cos x)]$
 $\left(0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right).$

【965】 $y = (\ln x)^x : x^{\ln x}.$

解 $y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} = \frac{e^{x \ln(\ln x)}}{e^{\ln^2 x}} = e^{x \ln(\ln x) - \ln^2 x}.$

$$\begin{aligned} y' &= e^{x \ln(\ln x) - \ln^2 x} [(x \ln(\ln x))' - (\ln^2 x)'] \\ &= \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2 \ln x}{x} \right] \\ &= \frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}} [x \ln x \cdot \ln(\ln x) + x - 2 \ln^2 x]. \end{aligned}$$

【965. 1】 $y = \left[\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)} \right]^{\arctan^2 x}.$

解 $y = e^{\arctan^2 x \ln \frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}}$

$$\begin{aligned} y' &= \left[\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)} \right]^{\arctan^2 x} \cdot \left\{ 2 \arctan x \frac{1}{1+x^2} \ln \frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)} \right. \\ &\quad + \arctan^2 x \left[\frac{1}{\arcsin(\sin^2 x)} \cdot \frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{1-\sin^4 x}} \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\arccos(\cos^2 x)} \cdot \frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{1-\cos^4 x}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

【966】 $y = \log_x e.$

解 $y = \log_x e = \frac{\ln e}{\ln x} = \frac{1}{\ln x}.$

从而 $y' = -\frac{1}{x \ln^2 x} \quad (x > 0, x \neq 1).$

【967】 $y = \ln(\operatorname{ch} x) + \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}.$

解 $y' = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} = \operatorname{th}^3 x.$

【968】 $y = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} - \ln\left(\operatorname{cth} \frac{x}{2}\right).$

解 $y' = \frac{\operatorname{sh}^3 x - 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^4 x} + \frac{1}{2\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{x}{2}}$
 $= -\frac{2}{\operatorname{sh}^3 x} \quad (x > 0).$

【969】 $y = \arctan(\tan x).$

解 $y' = \frac{1}{1 + \operatorname{th}^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} 2x}.$

【970】 $y = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right).$

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}} \left(-\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}\right) = \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x} \quad (x \neq 0).$

【971】 $y = \frac{b}{a}x + \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{th} \frac{x}{2}\right)$
 $(0 \leq |b| < a).$

解 $y' = \frac{b}{a} + \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a-b}{a+b} \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}} \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}$
 $= \frac{b}{a} + \frac{a^2 - b^2}{a(b + a \operatorname{ch} x)} = \frac{a + b \operatorname{ch} x}{b + a \operatorname{ch} x}.$

【972】 引入中间变量 $u = \cos^2 x$, 求出函数

$y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$ 的导数.

解 令 $u = \cos^2 x$, 则

$$y = \ln(u + \sqrt{1 + u^2}),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

而
$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= \frac{1}{u + \sqrt{1 + u^2}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^4 x}}, \end{aligned}$$

$$\frac{du}{dx} = -2\sin x \cos x = -\sin 2x,$$

于是
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^4 x}}.$$

用 972 题所示方法, 求出下列函数的导数 (973 ~ 976).

【973】 $y = (\arccos x)^2 \left[\ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) + \frac{1}{2} \right].$

解 令 $u = \arccos x$, 则 $y = u^2 \left[\ln^2 u - \ln u + \frac{1}{2} \right],$

而
$$\begin{aligned} y'_u &= 2u \left[\ln^2 u - \ln u + \frac{1}{2} \right] + u^2 \left[\frac{2\ln u}{u} - \frac{1}{u} \right] \\ &= 2u \ln^2 u = 2\arccos x \cdot \ln^2(\arccos x), \end{aligned}$$

$$u'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

因此
$$\frac{dy}{dx} = y'_u \cdot u'_x = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arccos x \cdot \ln^2(\arccos x)$$

$$(|x| < 1).$$

【974】 $y = \frac{1}{2} \arctan(\sqrt[4]{1+x^4}) + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + 1}{\sqrt[4]{1+x^4} - 1}.$

解 令 $u = \sqrt[4]{1+x^4}$, 则

$$y = \frac{1}{2} \arctan u + \frac{1}{4} \ln \frac{u+1}{u-1}.$$

而
$$y'_u = \frac{1}{2(1+u^2)} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} \right)$$

$$= \frac{1}{1-u^2} = -\frac{1}{x^4},$$

$$u'_x = \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}.$$

因此
$$\frac{dy}{dx} = y'_u \cdot u'_x = -\frac{1}{x^4} \cdot \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$$

$$= -\frac{1}{x \sqrt[4]{(1+x^4)^3}} \quad (x \neq 0).$$

【975】
$$y = \frac{e^{-x^2} \arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}} + \frac{1}{2} \ln(1-e^{-2x^2}).$$

解 令 $u = e^{-x^2}$, 则

$$y = \frac{u \arcsin u}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{1}{2} \ln(1-u^2).$$

从而
$$y'_u = \frac{\left(\arcsin u + \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) \sqrt{1-u^2} + \frac{u^2 \arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2}$$

$$= \frac{u}{1-u^2}$$

$$= \frac{\arcsin u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}},$$

$$u'_x = -2xe^{-x^2}.$$

因此
$$\frac{dy}{dx} = y'_u \cdot u'_x = \frac{-2xe^{-x^2} \arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}} \quad (x \neq 0).$$

【976】
$$y = \frac{a^x}{1+a^{2x}} - \frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}} \operatorname{arccot} a^{-x}.$$

解 设 $u = a^x$, 则

$$y = \frac{u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2} \cdot \operatorname{arccot} \frac{1}{u},$$

于是
$$y'_u = \frac{1+u^2-2u^2}{(1+u^2)^2} - \frac{-2u(1+u^2)-2u(1-u^2)}{(1+u^2)^2} \operatorname{arccot} \frac{1}{u}$$

$$- \frac{1-u^2}{1+u^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \frac{1}{u^2}$$

$$= \frac{4u \operatorname{arccot} \frac{1}{u}}{(1+u^2)^2} = \frac{4a^x \cdot \operatorname{arccot}(a^{-x})}{(1+a^{2x})^2},$$

$$u'_x = a^x \ln a.$$

因此
$$\frac{dy}{dx} = y'_u \cdot u'_x = \frac{4a^{2x} \ln a}{(1+a^{2x})^2} \operatorname{arccot}(a^{-x}) \quad (a > 0).$$

【977】 求下列函数的导函数并作函数及其导函数的图形,若:

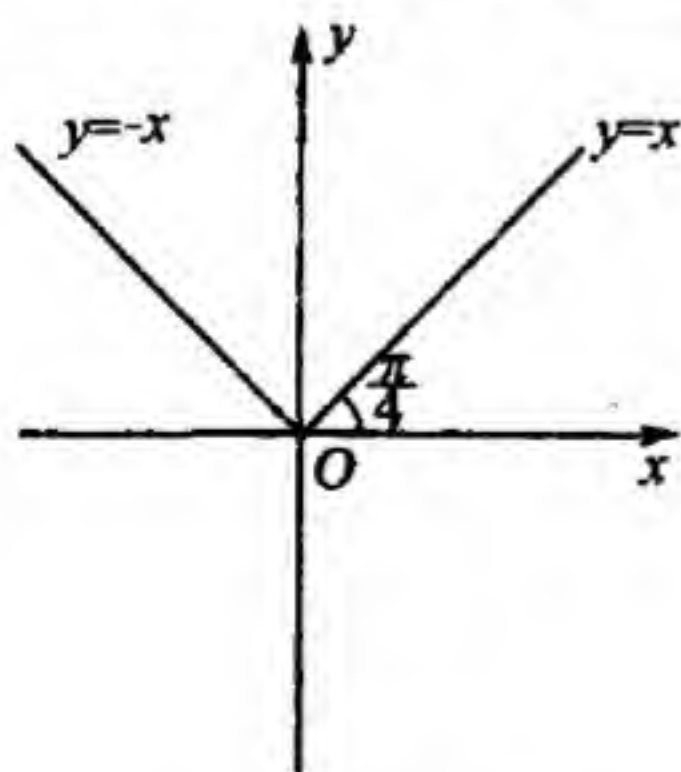
(1) $y = |x|$; (2) $y = x|x|$; (3) $y = \ln|x|$.

解 (1) $y = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ -x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \end{cases}$

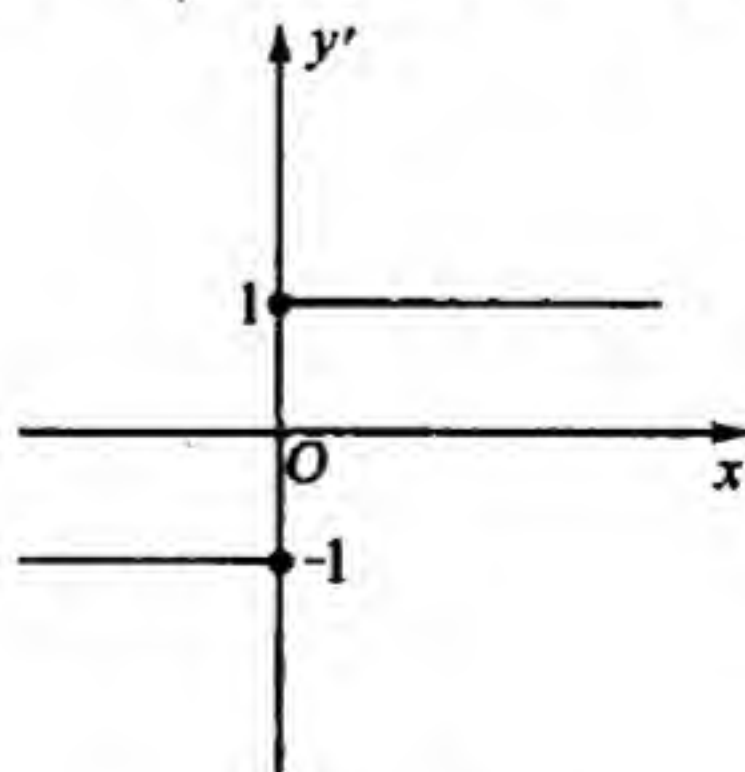
$$y' = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时,} \\ -1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

即
$$y' = \frac{|x|}{x} \quad (x \neq 0).$$

当 $x = 0$ 时, y' 不存在. 如 977 题图 1 及 977 题图 2 所示



977 题图 1



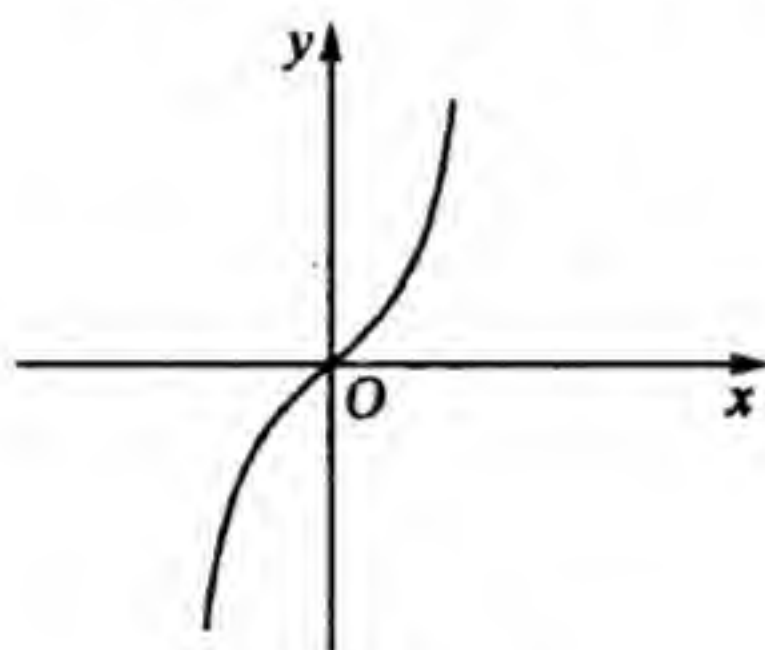
977 题图 2

$$(2) y = \begin{cases} x^2, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ -x^2, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

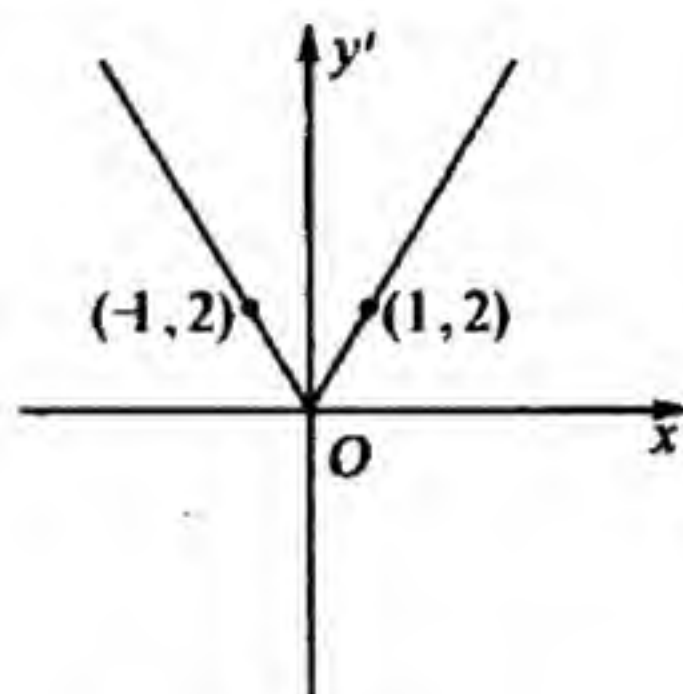
$$y' = \begin{cases} 2x, & \text{当 } x > 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时,} \\ -2x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

即 $y' = 2|x|$.

如 977 题图 3 及 977 题图 4 所示



977 题图 3

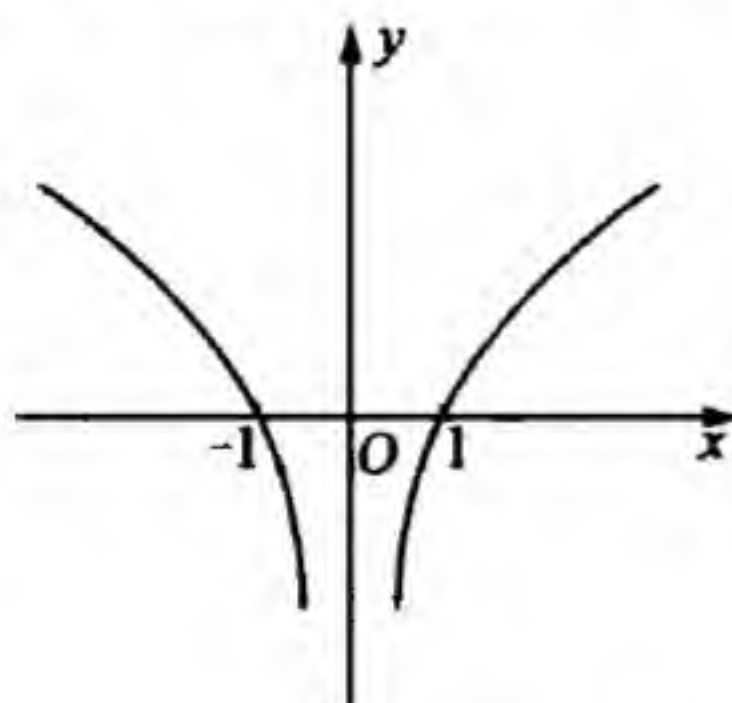


977 题图 4

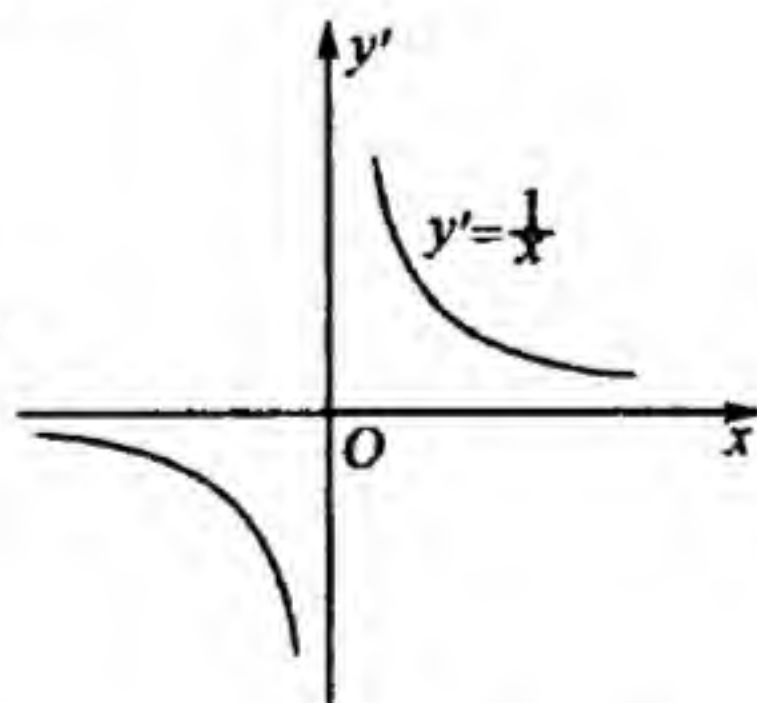
$$(3) y = \ln |x|,$$

$$y' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

如 977 题图 5 及 977 题图 6 所示



977 题图 5



977 题图 6

【978】 求出以下函数的导数:

$$(1) y = |(x-1)^2(x+1)^3|;$$

$$(2) y = |\sin^3 x|;$$

$$(3) y = \arccos \frac{1}{|x|};$$

$$(4) y = [x] \sin^2 \pi x.$$

解 (1) 由 977 题的结果有

$$\begin{aligned} y' &= \frac{|(x-1)^2(x+1)^3|}{(x-1)^2(x+1)^3} \cdot [2(x-1)(x+1)^3 \\ &\quad + 3(x-1)^2(x+1)^2] \\ &= (x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1) \quad (x \neq \pm 1). \end{aligned}$$

而当 $x = \pm 1$ 时, 直接验证可得

$$y'(1) = y'(-1) = 0,$$

满足上式.

因此 $y' = (x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1).$

$$(2) y' = \frac{|\sin^3 x|}{\sin^3 x} 3\sin^2 x \cos x = \frac{3}{2} \sin 2x |\sin x|$$

$$(x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

而当 $x = k\pi$ 时, 直接验证可知

$$y'|_{k\pi} = 0,$$

满足上式.

因此 $y' = \frac{3}{2} \sin 2x |\sin x|.$

$$(3) y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \frac{|x|}{x} \right) = \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}}$$

$$(|x| > 1).$$

(4) 当 $x \neq k(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, 有

$$y' = [x] \cdot 2\pi \cdot \sin \pi x \cdot \cos \pi = \pi \cdot [x] \cdot \sin(2\pi x).$$

当 $x = k$ 时, 直接验证有

$$y'|_k = 0,$$

满足上式.

因此 $y' = \pi[x] \cdot \sin(2\pi x).$

求导函数并作出函数及其导函数的图形(979 ~ 983).

$$\text{【979】 } y = \begin{cases} 1-x, & \text{当 } -\infty < x < 1; \\ (1-x)(2-x), & \text{当 } 1 \leq x \leq 2; \\ -(2-x), & \text{当 } 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

解 显然有

$$y' = \begin{cases} -1, & \text{当 } -\infty < x < 1 \text{ 时,} \\ 2x-3, & \text{当 } 1 < x < 2 \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } 2 < x < +\infty \text{ 时.} \end{cases}$$

而当 $x=1$ 时, 右导数

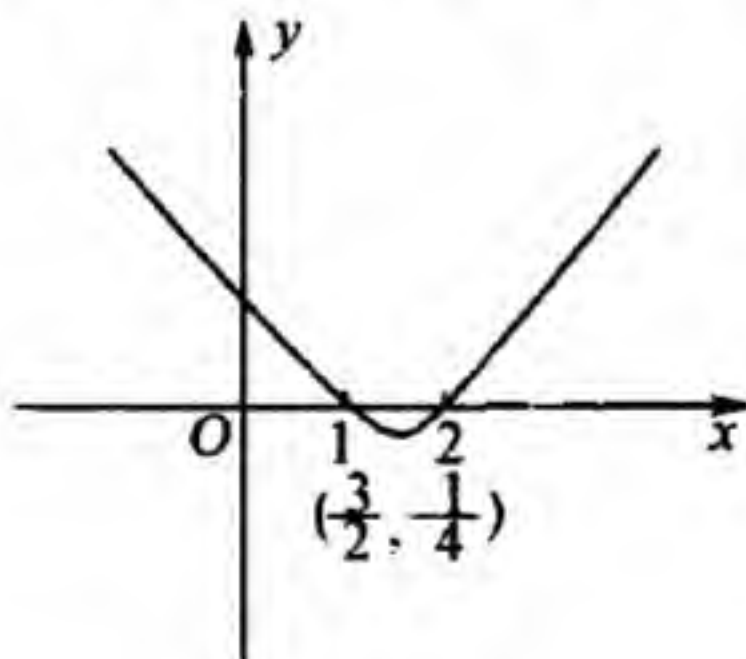
$$y'_+|_{x=1} = (2x-3)|_{x=1} = -1.$$

左导数 $y'_-|_{x=1} = -1$. 因此, 在 $x=1$ 处, 函数的导数存在, 且 $y'|_{x=1} = -1$.

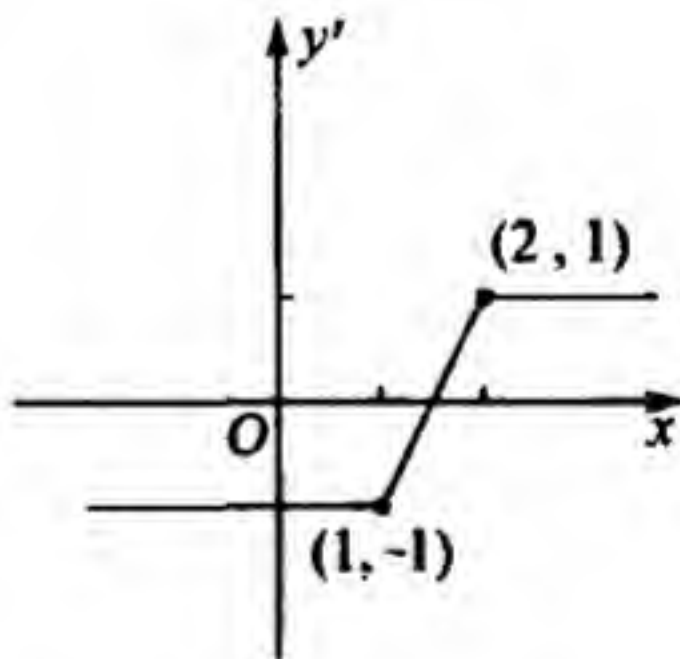
同理 $y'|_{x=2} = 1$.

$$\text{因此 } y' = \begin{cases} -1, & \text{当 } -\infty < x \leq 1 \text{ 时,} \\ 2x-3, & \text{当 } 1 \leq x \leq 2 \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } 2 < x < +\infty \text{ 时.} \end{cases}$$

如 979 题图 1 及图 2 所示



979 题图 1



979 题图 2

$$\text{【980】 } y = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2, & \text{当 } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{在线段 } [a, b] \text{ 之外.} \end{cases}$$

$$\text{解 } y' = \begin{cases} 2(x-a)(x-b)(2x-a-b), & \text{当 } a < x < b \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x < a \text{ 或 } x > b \text{ 时,} \end{cases}$$

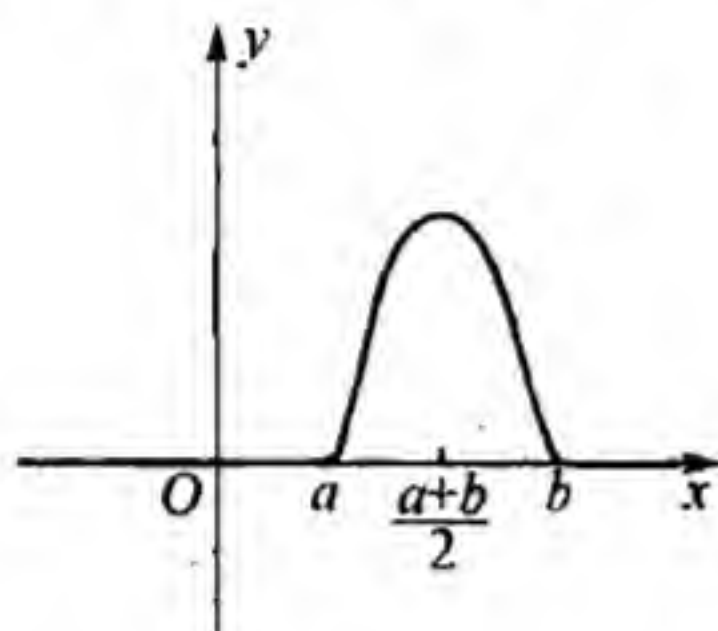
而在分段点 a . 右导数 $y'_+|_{x=a} = 0$, 左导数 $y'_-|_{x=a} = 0$, 因此,

$$y'|_{x=a} = 0.$$

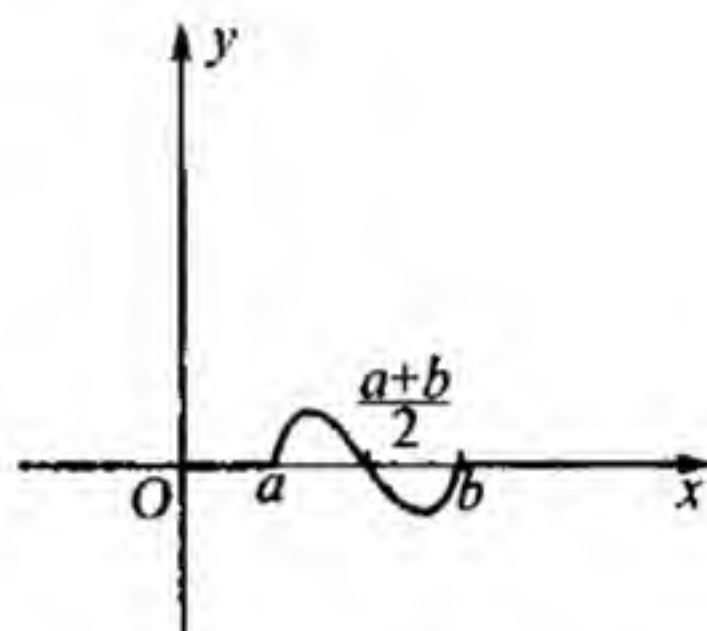
同样对分段点 b 进行讨论有 $y'|_{x=b} = 0$.

因此
$$y' = \begin{cases} 2(x-a)(x-b)(2x-a-b), & \text{当 } x \in [a, b] \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x \notin [a, b] \text{ 时.} \end{cases}$$

如 980 题图 1 及图 2 所示.



980 题图 1



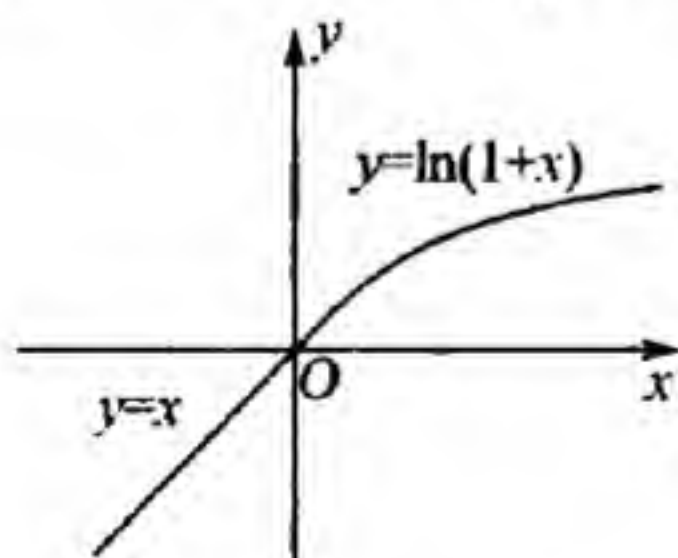
980 题图 2

【981】
$$y = \begin{cases} x, & \text{当 } x < 0; \\ \ln(1+x), & \text{当 } x \geq 0. \end{cases}$$

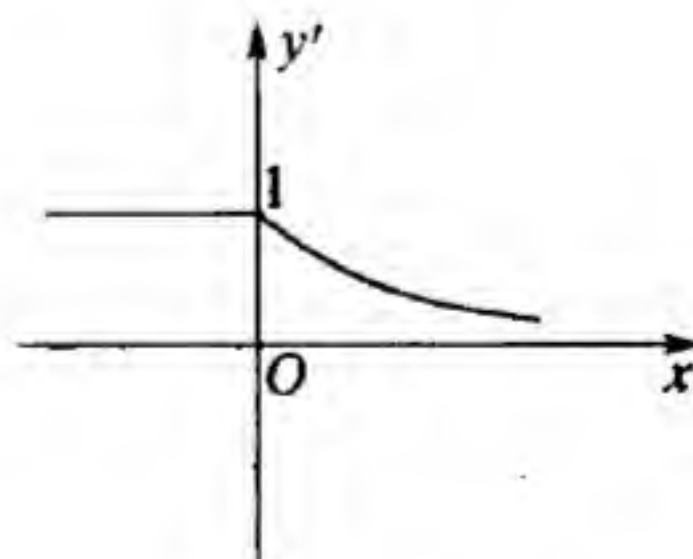
解 分段求函数导数并对分段点 $x = 0$ 进行讨论, 得

$$y' = \begin{cases} 1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \\ \frac{1}{1+x}, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

如图 981 题图 1 及图 2 所示



981 题图 1



981 题图 2

【982】
$$y = \begin{cases} \arctan x, & \text{当 } |x| \leq 1; \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2}, & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$$

$$\text{解 } y' = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & \text{当 } -1 < x < 1 \text{ 时,} \\ \frac{1}{2}, & \text{当 } |x| > 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

在分段点 $x = 1$,

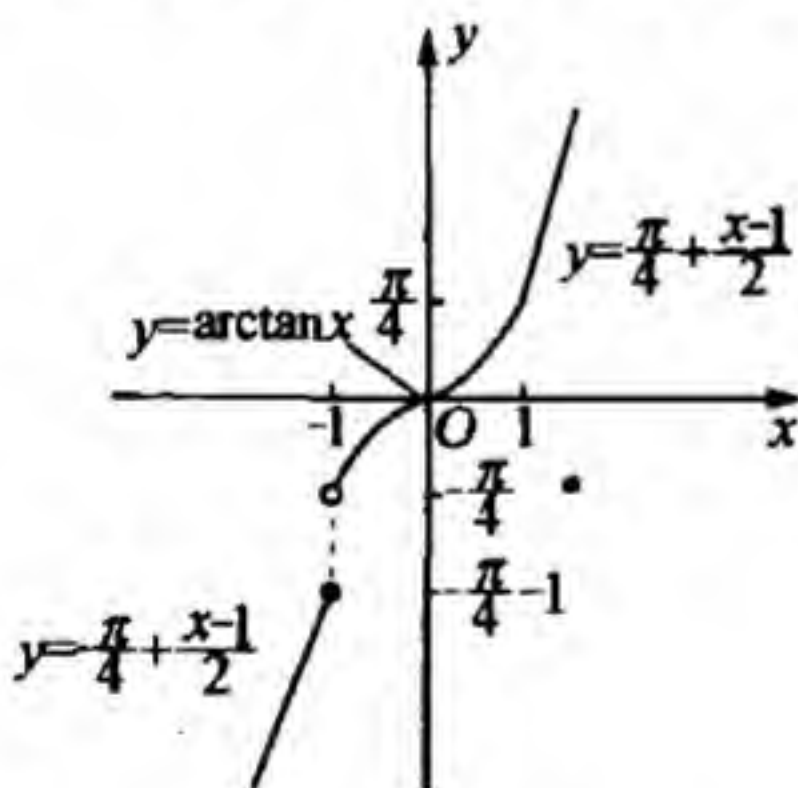
$$y'_+|_{x=1} = \frac{1}{2}, \quad y'_-|_{x=1} = \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } y'|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

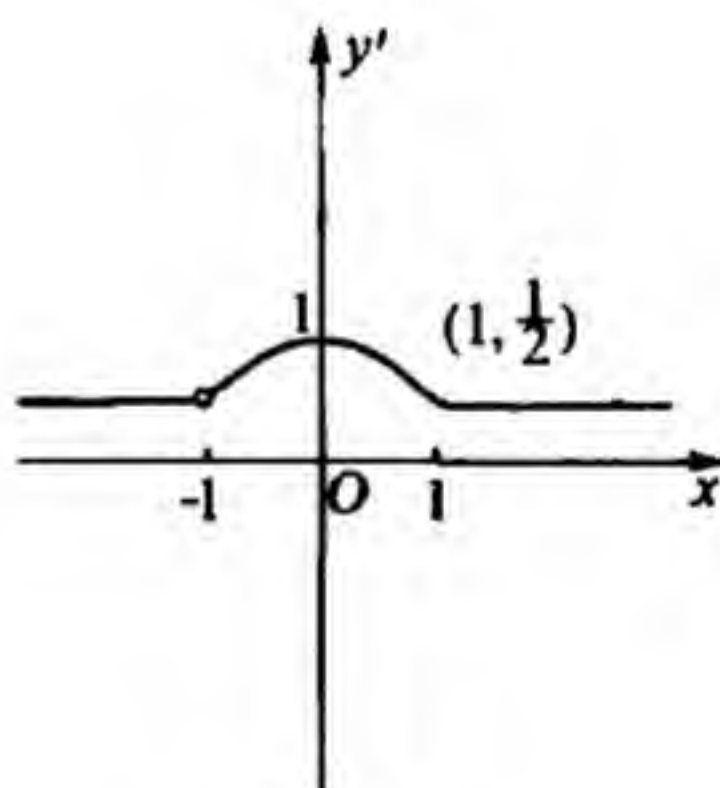
在分段点 $x = -1$, 函数不连续, 故导数不存在. 因此

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & \text{当 } -1 < x \leq 1 \text{ 时,} \\ \frac{1}{2}, & \text{当 } |x| > 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

· 如图 982 题图 1 及图 2 所示



982 题图 1



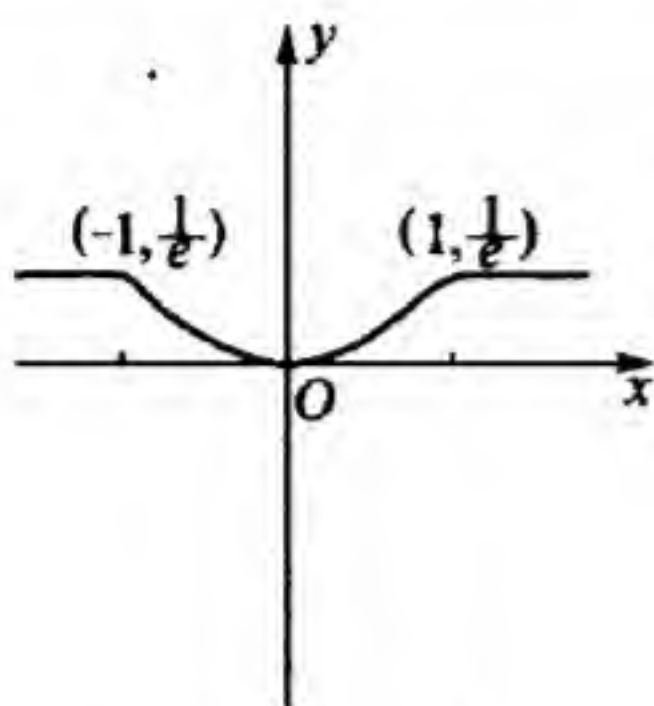
983 题图 2

$$\text{【983】 } y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & \text{当 } |x| \leq 1; \\ \frac{1}{e}, & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$$

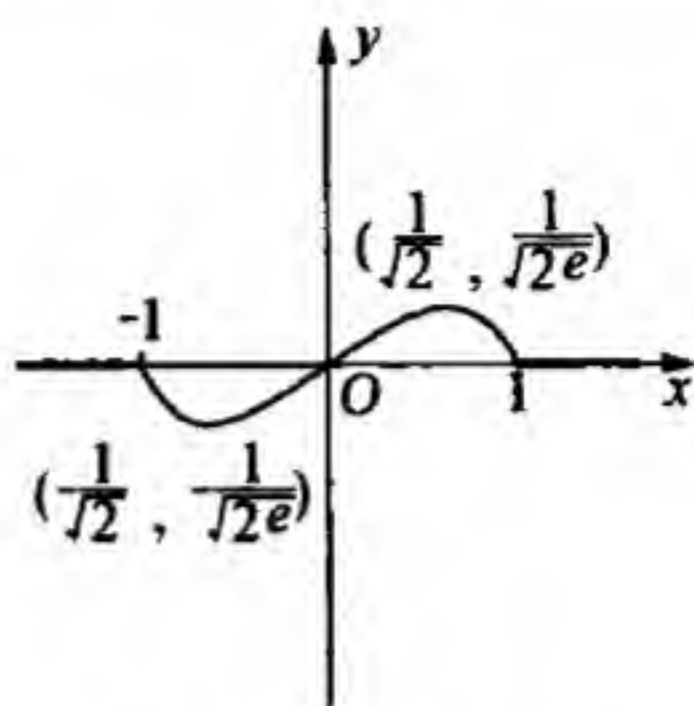
解 分段求函数的导数, 并对分段点进行讨论, 可得

$$y' = \begin{cases} 2xe^{-x^2}(1-x^2), & \text{当 } |x| \leq 1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } |x| > 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

如图 983 题图 1 及图 2 所示



983 题图 1



983 题图 2

【984】 由已知函数 $y = f(x)$ 的对数求得的导函数, 称作此函数的对数导数:

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx} \ln |f(x)| \equiv \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

求出函数 y 的对数导数, 若:

$$(1) y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$$

$$(2) y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}};$$

$$(3) y = (x-a_1)^{a_1} (x-a_2)^{a_2} \cdots (x-a_n)^{a_n};$$

$$(4) y = (x + \sqrt{1+x^2})^n.$$

解 (1) $\ln y = \ln |x| + \frac{1}{2} \ln |1-x|$

$$- \frac{1}{2} \ln |1+x|,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)} \\ &= \frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}, \quad (0 < |x| < 1). \end{aligned}$$

(2) $\ln y = 2 \ln |x| - \ln |1-x| + \frac{1}{3} \ln |3-x|$

$$- \frac{2}{3} \ln |3+x|,$$

$$\begin{aligned}\text{所以 } \frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3} \frac{1}{3-x} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3+x} \\ &= \frac{54 - 36x + 4x^2 + 2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}\end{aligned}$$

$$(x \neq 0, x \neq 1, x \neq \pm 3).$$

(3) 应假设

$$(x-a_1)^{a_1}(x-a_2)^{a_2}\cdots(x-a_n)^{a_n} > 0,$$

$$\ln y = \sum_{i=1}^n a_i \ln |x-a_i|.$$

$$\text{所以 } \frac{d}{dx}(\ln y) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x-a_i}, \quad (x \in R),$$

$$\text{其中 } R = \left\{x \mid \prod_{i=1}^n (x-a_i)^{a_i} > 0\right\}.$$

$$(4) \ln y = n \ln(x + \sqrt{1+x^2}),$$

$$\text{故 } \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.$$

【985】 假设 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为 x 的可微函数, 求出函数 y 的导函数. 如果

$$(1) y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)};$$

$$(2) y = \arctan \frac{\varphi(x)}{\psi(x)};$$

$$(3) y = {}^{\varphi(x)}\sqrt{\psi(x)}, \quad (\varphi(x) \neq 0; \psi(x) > 0);$$

$$(4) y = \log_{\varphi(x)} \psi(x), \quad (\varphi(x) > 0; \psi(x) > 0).$$

$$\text{解 } (1) y' = \frac{\varphi(x)\varphi'(x) + \psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}}$$

$$(\varphi^2(x) + \psi^2(x) \neq 0).$$

$$(2) y' = \frac{1}{1 + \frac{\varphi^2(x)}{\psi^2(x)}} \cdot \frac{\varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{\psi^2(x)}$$

$$= \frac{\varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x) + \psi^2(x)} \quad (\psi(x) \neq 0).$$

(3) 由于

$$y = \varphi(x) \sqrt{\psi(x)}.$$

从而 $\ln y = \frac{1}{\varphi(x)} \ln \psi(x),$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \varphi(x) - \varphi'(x) \ln \psi(x)}{\varphi^2(x)},$$

因此 $y' = \varphi(x) \sqrt{\psi(x)} \left\{ \frac{1}{\varphi(x)} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \ln \psi(x) \right\}.$

(4) $y = \log_{\varphi(x)} \psi(x) = \frac{\ln \psi(x)}{\ln \varphi(x)},$

所以
$$\begin{aligned} y' &= \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \cdot \ln \varphi(x) - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \ln \psi(x)}{\ln^2 \varphi(x)} \\ &= \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{1}{\ln \varphi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{\ln \psi(x)}{\ln^2 \varphi(x)}. \end{aligned}$$

【986】 若

(1) $y = f(x^2);$

(2) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x);$

(3) $y = f(e^x) \cdot e^{f(x)};$

(4) $y = f\{f[f(x)]\}.$

其中 $f(u)$ 为可微分的函数. 求 y' .

解 (1) $y' = 2xf'(x^2).$

(2)
$$\begin{aligned} y' &= 2\sin x \cos x f'(\sin^2 x) - 2\sin x \cos x f'(\cos^2 x) \\ &= \sin 2x [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]. \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} y' &= e^x \cdot f'(e^x) \cdot e^{f(x)} + f(e^x) e^{f(x)} \cdot f'(x) \\ &= e^{f(x)} [e^x f'(e^x) + f'(x) f(e^x)]. \end{aligned}$$

(4) $y' = f'(x) \cdot f'[f(x)] \cdot f'\{f[f(x)]\}.$

【986. 1】 若 $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-1000)$
求 $f'(0)$.

$$\text{解 } f'(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-1000) \\ + x[(x-1)(x-2)\cdots(x-1000)]',$$

$$\text{故 } f'(0) = (-1)(-2)\cdots(-1000) + 0 \\ = (-1)^{1000} 1000! = 1000!.$$

【987】 证明: n 阶行列式的微分法:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' \\ = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

证 法一:利用行列式的定义直接证明

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} \\ = \frac{d}{dx} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots f_{nj_n}(x) \\ = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} \frac{d}{dx} [f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots f_{nj_n}(x)]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} \sum_{k=1}^n f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots f'_{kj_k}(x) \cdots f_{nj_n}(x) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots f'_{kj_k}(x) \cdots f_{nj_n}(x) \\
&= \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

其中 $N(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 表示排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数

$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列求和.

法二: 利用数学归纳法证明

由于

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} \\
&= \frac{d}{dx} [f_{11}(x)f_{22}(x) - f_{12}(x)f_{21}(x)] \\
&= f'_{11}(x)f_{22}(x) - f'_{12}(x)f_{21}(x) + f_{11}(x)f'_{22}(x) \\
&\quad - f_{12}(x)f'_{21}(x) \\
&= \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

即等式当 $n = 2$ 时成立.

现假设等式当 $n = k$ 时成立, 即

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{ik}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^k \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{i1}(x) & f'_{i2}(x) & \cdots & f'_{ik}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix},$$

现证等式当 $n = k + 1$ 时也成立. 事实上

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k+11}(x) & f_{k+12}(x) & \cdots & f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix} \\ &= \frac{d}{dx} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} f_{k+1j}(x) \\ & \quad \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & \cdots & f_{ij-1}(x) & f_{ij+1}(x) & \cdots & f_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{kj-1}(x) & f_{kj+1}(x) & \cdots & f_{kk+1}(x) \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} f'_{k+1j}(x) \\ & \quad \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & \cdots & f_{ij-1}(x) & f_{ij+1}(x) & \cdots & f_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{kj-1}(x) & f_{kj+1}(x) & \cdots & f_{kk+1}(x) \end{vmatrix} \\ & \quad + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} f_{k+1j}(x) \frac{d}{dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & \cdots & f_{ij-1}(x) & f_{ij+1}(x) & \cdots & f_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{kj-1}(x) & f_{kj+1}(x) & \cdots & f_{kk+1}(x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{kk+1}(x) \\ f'_{k+11}(x) & \cdots & f'_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix} \\
&+ \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} f_{k+1j}(x) \sum_{i=1}^k \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{i1}(x) & \cdots & f'_{ij-1}(x) & f'_{ij+1}(x) & \cdots & f'_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{kj-1}(x) & f_{kj+1} & \cdots & f_{kk+1}(x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{kk+1}(x) \\ f'_{k+11}(x) & \cdots & f'_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix} \\
&+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} f_{k+1j}(x) \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{i1}(x) & \cdots & f'_{ij-1}(x) & f'_{ij+1}(x) & \cdots & f'_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{kj-1}(x) & f_{kj+1}(x) & \cdots & f_{kk+1}(x) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} \begin{vmatrix} f_{i1}(x) & \cdots & f_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{i1}(x) & \cdots & f'_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k+i1}(x) & \cdots & f_{k+ik+1}(x) \end{vmatrix},$$

即当 $n = k + 1$ 时, 等式也成立.

因此由数学归纳法, 等式对一切自然数 n 均成立.

【988】 若

$$F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}, \text{求 } F'(x).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } F'(x) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x^2 + x + 9) + (x^2 - 1 + 4) + (x^2 - x + 3) \\ &= 3(x^2 + 5). \end{aligned}$$

【989】 若

$$F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}, \text{求 } F'(x).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } F'(x) &= \begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & 2 & 6x \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= 0 + 0 + 6(2x^2 - x^2) = 6x^2$$

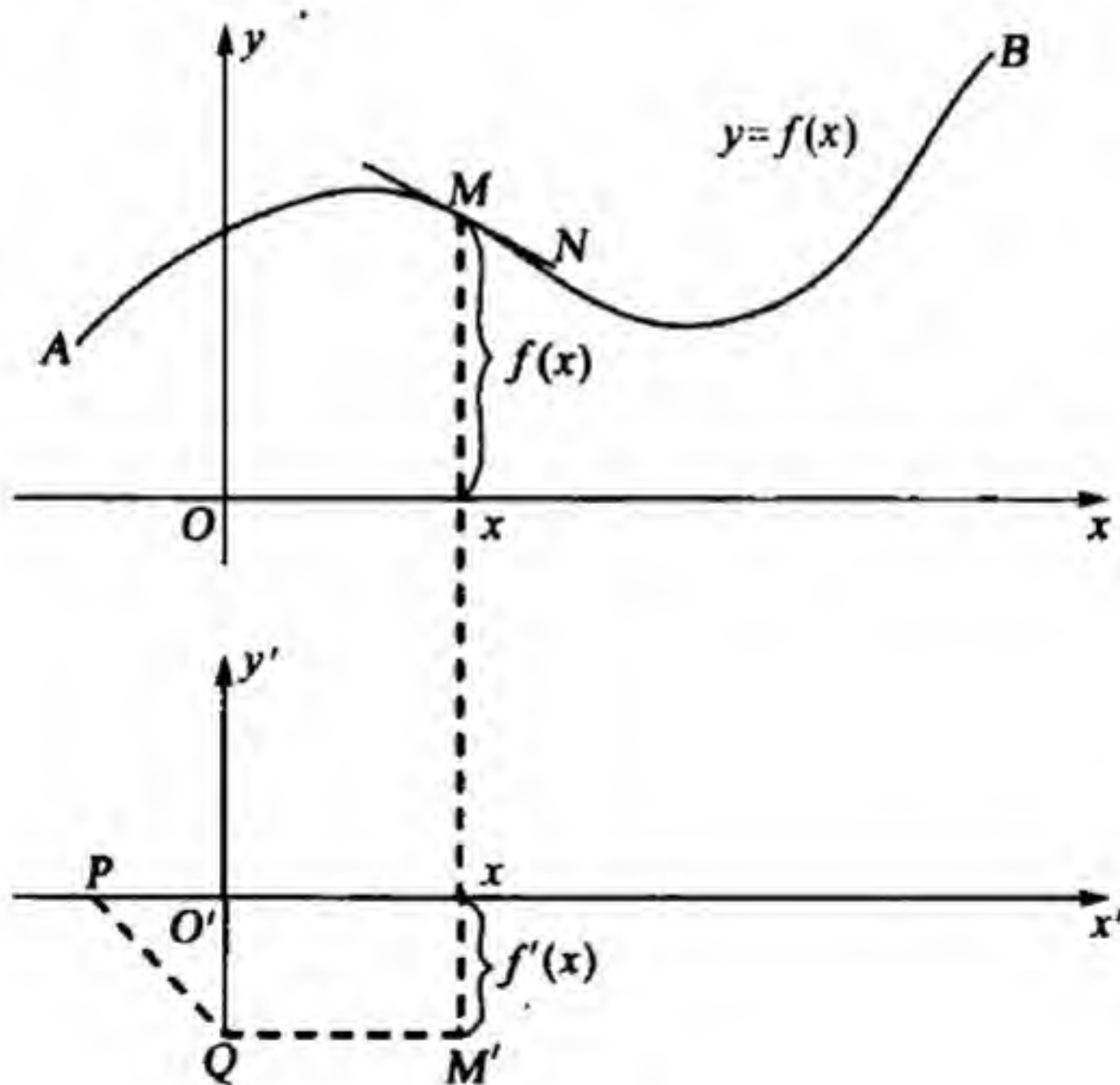
【990】 已知函数的图形. 近似地作出它的导函数图形.

解 先由所给曲线 $y = f(x)$ 上一点 M , 作出曲线 $y = f'(x)$ 上的对应点 M' . 作法如下:

在曲线 $y = f(x)$ 上任取一点 $M(x, f(x))$, 并作曲线在点 M 处的切线 MN , 过点 $P(-1, 0)$ 作平行 MN 的直线 PQ 交 Oy 轴于点 Q , 于是

$$O'Q = \tan \alpha = f'(x),$$

过点 Q 作平行于 Ox 轴的直线, 与过点 $(x, 0)$ 且垂直于 Ox 轴的直线交于 M' , 则 M' 的坐标为 $(x, f'(x))$, 即 M' 是曲线 $y = f'(x)$ 上的点. 如 990 题图 1 所示



990 题图 1

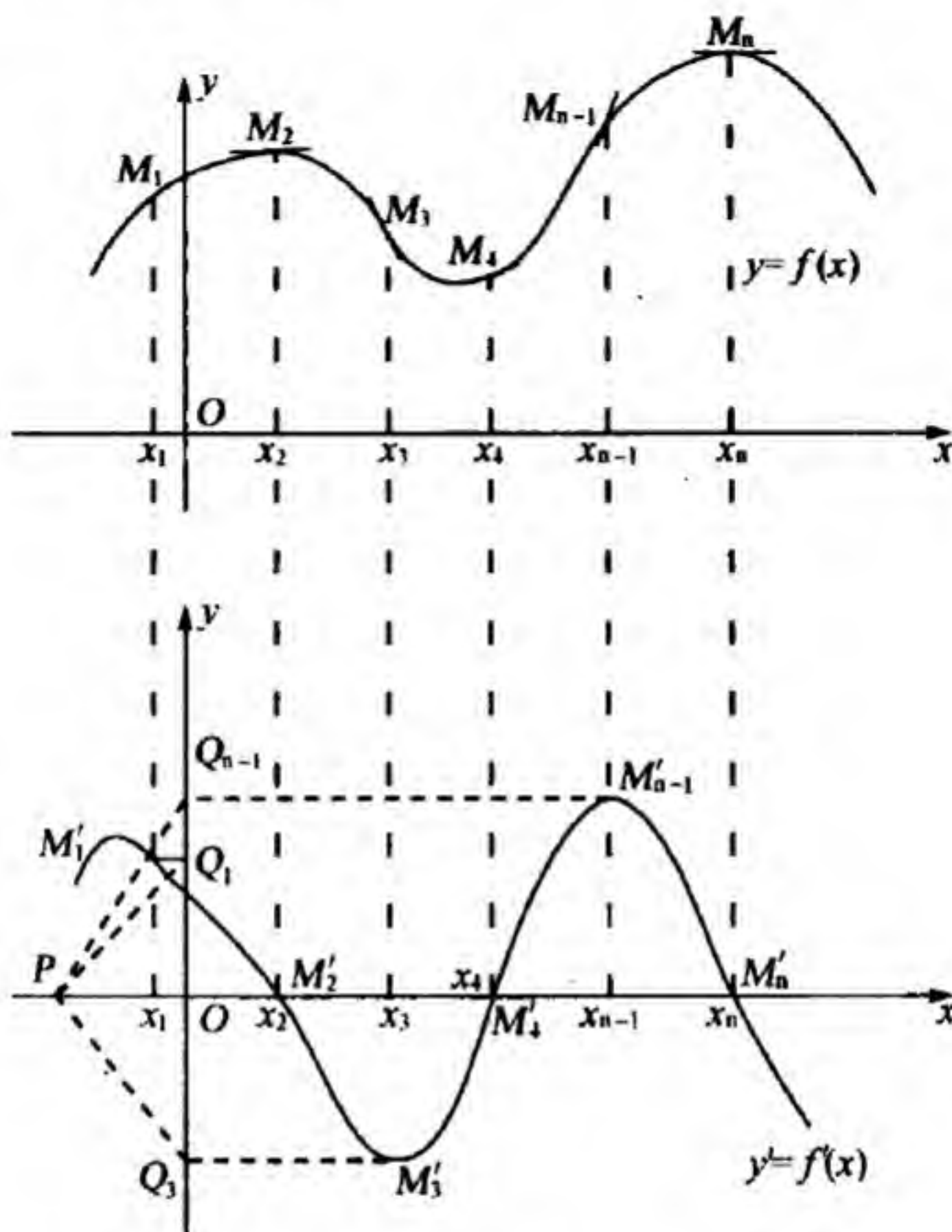
由此, 在曲线 $y = f(x)$ 上取若干点

$$M_i(x_i, f(x_i)) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

按上述方法作出曲线 $y = f'(x)$ 上相应的点

$$M'_i(x_i, f'(x_i)) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

最后用光滑的曲线连接 M'_1, M'_2, \dots, M'_n , 得到的曲线即为 $y = f'(x)$. 如 990 题图 2 所示



990 题图 2

【991】 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{当 } x \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0. \end{cases}$$

具有不连续的导函数.

证 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

而
$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0,$$

故 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处存在.

但 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ 不存在. 所以 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续. 这说明了 $f(x)$ 有不连续的导函数.

【992】 问在什么条件下函数

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & (x \neq 0); \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(1) 在 $x=0$ 处是连续的; (2) 在 $x=0$ 处可微分; (3) 在 $x=0$ 处具有连续导数?

解 (1) 当 $n > 0$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x} = 0,$$

于是 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$,

即当 $n > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) 当 $n > 1$ 时,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{n-1} \sin \frac{1}{\Delta x} = 0,$$

于是 $f'(0) = 0$. 因此当 $n > 1$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微.

(3) 当 $n > 2$ 时,

$$f'(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

$$f'(0) = 0,$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$.

即当 $n > 2$ 时, $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【993】 问在什么条件下函数

$$f(x) = |x|^n \sin \frac{1}{|x|^m} \quad (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0 \quad (m > 0),$$

(1) 在坐标原点的邻域内具有有界导数;

(2) 在该域上具有无界导数?

解 (1) 当 $x \neq 0, x \in (-\delta, \delta)$ 时 ($\delta > 0$),

$$\begin{aligned} f'(x) &= n |x|^{n-1} \frac{|x|}{x} \sin \frac{1}{|x|^m} - \frac{m}{|x|^{m+1}} \\ &\quad \cdot \frac{|x|}{x} |x|^n \cdot \cos \frac{1}{|x|^m} \\ &= \frac{|x|}{x} \left[n |x|^{n-1} \sin \frac{1}{|x|^m} - m |x|^{n-m-1} \cos \frac{1}{|x|^m} \right], \end{aligned}$$

由于 $\frac{|x|}{x}, \sin \frac{1}{|x|^m}, \cos \frac{1}{|x|^m}$ 均为有界函数.

故当 $n \geq m+1$ 时, $f'(x)$ 在 $(-\delta, \delta)$ 内有界 (此时 $f'(0) = 0$).

(2) 在此域上, 当 $n-m-1 < 0$, 即 $n < m+1$ 时, $f'(x)$ 为无界, 另一方面当 $n > 1$ 时 $f'(0)$ 才存在.

因此, 当 $1 < n < m+1$ 时, $f'(x)$ 在 $(-\delta, \delta)$ 内存在且为无界函数.

【994】 若 $f(x) = (x-a)\varphi(x)$,

其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处是连续的. 求 $f'(a)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } f'(a) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \varphi(a+\Delta x) - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(a+\Delta x) = \varphi(a). \end{aligned}$$

【995】 证明: 函数

$$f(x) = |x-a| \varphi(x),$$

(其中 $\varphi(x)$ 为连续函数, 且 $\varphi(a) \neq 0$) 在点 a 无导数.

问单侧导数 $f'_-(a)$ 和 $f'_+(a)$ 等于多少?

证 因为

$$\begin{aligned} f'_-(a) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|\Delta x| \cdot \varphi(a+\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} [-\varphi(a+\Delta x)] = -\varphi(a), \\ f'_+(a) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \varphi(a + \Delta x) = \varphi(a).$$

由于 $\varphi(a) \neq 0$, 故 $f'_-(a) \neq f'_+(a)$.

因此 $f(x)$ 在点 a 没有导数.

【996】 请举出在已知点: a_1, a_2, \dots, a_n 没有导数的连续函数的实例.

解 因为 $y = |x - a|$ 在点 a 处连续且无导数.

故
$$f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i|,$$

及
$$g(x) = \prod_{i=1}^n |x - a_i|,$$

均为在 a_1, a_2, \dots, a_n 连续且在这些点不可导的函数.

【997】 证明: 函数

$$f(x) = x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| \quad (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0,$$

在点 $x = 0$ 的任何邻域内具有不可微分点, 但在点 $x = 0$ 是可微分的.

绘制此函数的简图.

证 对于函数 $f(x)$, 我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|}{x} = 0.$$

故 $f'(0) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是可微的.

令
$$x_n = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}.$$

因为
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a+t} - \left(\frac{1}{a} - \frac{t}{a^2} \right)}{t} = 0,$$

即
$$\frac{1}{a+t} = \frac{1}{a} - \frac{t}{a^2} + o(t) \quad (a \neq 0),$$

从而
$$\begin{aligned} f'_-(x_{2n}) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_{2n} + \Delta x) - f(x_{2n})}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_{2n} + \Delta x)^2 \left| \cos \frac{\pi}{x_{2n} + \Delta x} \right| - 0}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_{2n} + \Delta x)^2 \left| \cos \pi \left(\frac{1}{x_{2n}} - \frac{\Delta x}{x_{2n}^2} + o(\Delta x) \right) \right|}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_{2n} + \Delta x)^2 \left| \sin \left(\frac{\Delta x}{x_{2n}^2} \pi - o(\Delta x) \right) \right|}{\Delta x} = -\pi.
\end{aligned}$$

同样 $f'_+(x_{2n}) = \pi$.

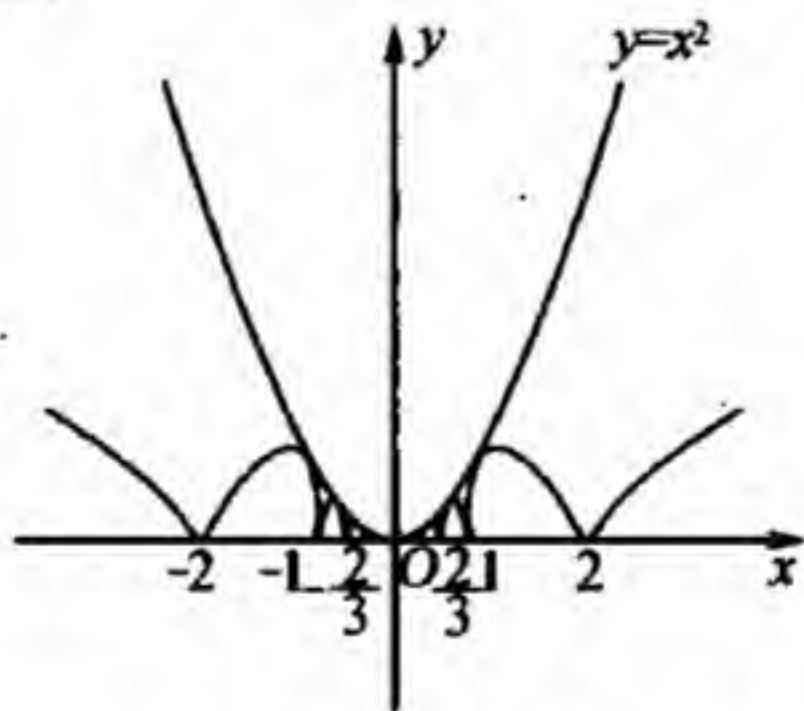
所以 $f'_-(x_{2n}) \neq f'_+(x_{2n})$.

同样可证 $f'_-(x_{2n+1}) \neq f'_+(x_{2n+1})$.

因此, $f(x)$ 在点 x_n 处不可微, 而对于 $x=0$ 的任何邻域 $(-\delta, \delta)$, 当 n 充分大时, 总有 $0 < x_n < \delta$, 即 $x_n \in (-\delta, \delta)$.

故在 $x=0$ 的任何邻域内都有不可微的点. 函数的图形在 Ox 轴的上方, 在曲线 $y=x^2$ 的下方. 当 $x = \frac{2}{2n+1}$ 时, $f(x) = 0$, 且 $f'(x)$ 不存在.

如 997 题图所示



997 题图

【998】 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数;} \end{cases}$$

仅在 $x=0$ 时有导数.

$$\text{证 } \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \begin{cases} \Delta x, & \text{当 } \Delta x \text{ 为有理数时;} \\ 0, & \text{当 } \Delta x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

$$\text{于是 } f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = 0,$$

其次, 当 $x \neq 0$ 时, 我们分两种情况讨论.

(1) x 为有理数, 取一无理数序列 $\{x_n\}$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

$$\text{则 } \lim_{x_n \rightarrow x} \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x} = \lim_{x_n \rightarrow x} \frac{0-x^2}{x_n-x} = \infty.$$

所以, $f(x)$ 在任一有理数点 $x (\neq 0)$ 处不可微.

(2) x 为无理数, 取一有理数序列, $\{x'_n\}$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x,$$

$$\text{从而 } \lim_{x'_n \rightarrow x} \frac{f(x'_n)-f(x)}{x'_n-x} = \lim_{x'_n \rightarrow x} \frac{x'^2_n}{x'_n-x} = \infty.$$

所以, $f(x)$ 在任一无理数点 x 处不可微.

综上所述, $f(x)$ 仅在 $x=0$ 处有导数.

【999】 研究以下函数的可微性:

$$(1) y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|;$$

$$(2) y = |\cos x|;$$

$$(3) y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x;$$

$$(4) y = \arcsin(\cos x);$$

$$(5) y = \begin{cases} \frac{x-1}{4}(x+1)^2, & \text{当 } |x| \leq 1; \\ |x|-1, & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$$

解 (1) 当 $x \neq 1, 2, 3$ 时函数可微,

现考察在 1, 2, 3 这三点的可微性.

① 当 $x=1$ 时, 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} |(\Delta x-1)^2(\Delta x-2)^3|,$$

$$\text{故 } \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8, \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -8.$$

因此 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在. 即函数 y 在 $x = 1$ 处不可微.

② 当 $x = 2$ 时, 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x |(\Delta x + 1)(\Delta x - 1)^3|,$$

所以 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$

因而 y 在 $x = 2$ 处可微且 $y' |_{x=2} = 0.$

③ 当 $x = 3$ 时, 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x |\Delta x| |(\Delta x + 2)(\Delta x + 1)^2|,$$

所以 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$

因而 y 在 $x = 3$ 处可微, 且 $y' |_{x=3} = 0.$

(2) 当 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时函数可微. 而在点

$x_{2n} = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ 有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left| \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} + \Delta x\right) \right|}{\Delta x} = \frac{|-\sin \Delta x|}{\Delta x},$$

因而 $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1,$$

即函数 y 在 x_{2n} 处不可微.

同理可得 y 在 $x_{2n+1} = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}$ 处也不可微.

因此 $y = |\cos x|$ 在 $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 处不可微.

(3) 当 $x \neq \pm \pi$ 时, $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x$ 可微.

下面讨论在 $x = \pi$ 及 $x = -\pi$ 处的可微性.

当 $x = \pi$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{|\pi^2 - (\pi + \Delta x)^2| \sin^2(\pi + \Delta x) - 0}{\Delta x} \\ &= \frac{\sin^2 \Delta x |2\pi \Delta x + (\Delta x)^2|}{\Delta x},\end{aligned}$$

所以 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

因此, 函数 y 在 $x = \pi$ 处可微.

同样可证函数 y 在 $x = -\pi$ 处可微.

因此, $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处可微.

(4) $y = \arcsin(\cos x)$ 在 $|\cos x| = 1$ 的点不可微, 即在 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 处不可微.

(5) 当 $x \neq \pm 1$ 时, 函数 y 可微.

下面我们讨论当 $x = 1$ 及 $x = -1$ 时函数的可微性.

当 $x = 1$ 时,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{4}(\Delta x + 2)^2}{\Delta x} = 1, \\ \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{|\Delta x + 1| - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.\end{aligned}$$

所以函数 y 在 $x = 1$ 处可微.

当 $x = -1$ 时,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|-1 + \Delta x| - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, \\ \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\frac{(-1 + \Delta x - 1) \cdot (\Delta x)^2}{4}}{\Delta x} = 0.\end{aligned}$$

所以, 函数 y 在 $x = -1$ 处不可微.

求下列函数 $f(x)$ 的左侧导数和右侧导数(1000 ~ 1008).

【1000】 $f(x) = |x|$.

解 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x) = \operatorname{sgn} x,$$

当 $x = 0$ 时,

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0; \\ -1, & \Delta x < 0. \end{cases}$$

所以 $f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1$.

【1001】 $f(x) = [x]\sin\pi x$.

解 当 $k < x < k+1$ 时 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$),

$$f'_-(x) = f'_+(x) = k\pi\cos\pi x;$$

当 $x = k$ 时 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 有

$$\begin{aligned} f'_+(k) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{[k+\Delta x]\sin\pi(k+\Delta x) - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{(k+\Delta x)(-1)^k \sin(\pi\Delta x)}{\Delta x} \\ &= (-1)^k k\pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(k) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(k-1+\Delta x)\sin\pi(k-1+\Delta x)}{\Delta x} \\ &= (-1)^{k-1} (k-1)\pi. \end{aligned}$$

【1002】 $f(x) = x \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|$ ($x \neq 0$), $f(0) = 0$.

解 当 $\cos \frac{x}{\pi} \neq 0$, 即 $x \neq \frac{2}{2k+1}$ 时 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$),

$$\begin{aligned} f'_+(x) &= f'_-(x) \\ &= \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| + \frac{\pi}{x} \frac{\left| \cos \frac{\pi}{x} \right|}{\cos \frac{\pi}{x}} \cdot \sin \frac{\pi}{x} \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x} \right) \operatorname{sgn} \left(\cos \frac{\pi}{x} \right); \end{aligned}$$

当 $x = \frac{2}{2k+1}$ 时 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$),

设 $x_k = \frac{2}{2k+1}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$),

由于 $\frac{1}{a+t} = \frac{1}{a} - \frac{t}{a^2} + o(t)$ ($t \rightarrow 0$),

我们有

$$\begin{aligned}
 f'_+(x_k) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{(x_k + \Delta x) \left| \cos \frac{\pi}{x_k + \Delta x} \right|}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{(x_k + \Delta x) \left| \cos \left[\frac{\pi}{x_k} - \frac{\Delta x \pi}{x_k^2} + o(\Delta x) \right] \right|}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{(x_k + \Delta x) \left| \cos \left[k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta x}{x_k^2} \pi + o(\Delta x) \right] \right|}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{(x_k + \Delta x) \left| \sin \left(\frac{\Delta x \pi}{x_k^2} + o(\Delta x) \right) \right|}{\Delta x} \\
 &= \frac{\pi}{x_k} = \frac{2k+1}{2} \pi.
 \end{aligned}$$

同理 $f'_-(x_k) = -\frac{2k+1}{2} \pi,$

即 $f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right) = \frac{2k+1}{2} \pi,$
 $f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right) = -\frac{2k+1}{2} \pi.$

【1003】 $f(x) = \sqrt{\sin x^2}.$

解 当 $\sqrt{2k\pi} < |x| < \sqrt{(2k+1)\pi} (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时,

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}.$$

当 $x = 0$ 时,

$$\begin{aligned}
 f'_+(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\sin \Delta x^2}}{\Delta x} = 1, \\
 f'_-(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(0\Delta + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{\sin \Delta x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} -\frac{\sqrt{\sin \Delta x^2}}{\Delta x^2} = -1.
 \end{aligned}$$

当 $x = \sqrt{2k\pi} (k = 1, 2, \dots)$,

$$\begin{aligned} f'_+(\sqrt{2k\pi}) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(\sqrt{2k\pi} + \Delta x) - f(\sqrt{2k\pi})}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\sin(\sqrt{2k\pi} + \Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\sin[2\Delta x \sqrt{2k\pi} + (\Delta x)^2]}}{\Delta x} \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

同样 $f'_-(\sqrt{(2k+1)\pi}) = -\infty$,

$$f'_-(-\sqrt{2k\pi}) = -\infty,$$

$$f'_+(-\sqrt{(2k+1)\pi}) = +\infty.$$

$f'_-(\sqrt{2k\pi}), f'_+(\sqrt{(2k+1)\pi}), f'_+(-\sqrt{2k\pi}), f'_-(-\sqrt{(2k+1)\pi})$ 均不存在 ($k = 1, 2, \dots$).

【1004】 $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ ($x \neq 0$), $f(0) = 0$.

解 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{(1 + e^{\frac{1}{x}})^2}.$$

当 $x = 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\frac{\Delta x}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}} = 1. \end{aligned}$$

【1005】 $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}.$

解 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$$

当 $x = 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1-e^{-(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1-e^{-(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = 1, \end{aligned}$$

同样可求得 $f'_-(0) = -1$.

【1006】 $f(x) = |\ln |x||$ ($x \neq 0$).

$$\text{解 } f(x) = \begin{cases} \ln |x|, & \text{当 } |x| > 1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } |x| = 1 \text{ 时;} \\ -\ln |x|, & \text{当 } 0 < |x| < 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

所以当 $0 < |x| < 1$ 时,

$$f'_+(x) = f'_-(x) = -\frac{1}{x}.$$

当 $|x| > 1$ 时,

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{1}{x}.$$

当 $|x| = 1$ 时,

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\ln |1+\Delta x|}{\Delta x} \\ &= -\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \ln |(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}| \\ &= -\ln e = -1. \end{aligned}$$

同理可求 $f'_+(-1) = 1, f'_-(-1) = -1$.

【1007】 $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

解 当 $|x| \neq 1$ 时,

$$\begin{aligned} f'_+(x) &= f'_-(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} \\ &= \frac{2}{1+x^2} \operatorname{sgn}(1-x^2). \end{aligned}$$

当 $x = 1$ 时,

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\arcsin \frac{2(1+\Delta x)}{1+(1+\Delta x)^2} - \arcsin 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\arcsin \frac{1-(1+\Delta x)^2}{1+(1+\Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\arcsin \frac{1-(1+\Delta x)^2}{1+(1+\Delta x)^2}}{\frac{1-(1+\Delta x)^2}{1+(1+\Delta x)^2}} \cdot \frac{1-(1+\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\arcsin \frac{2(1+\Delta x)}{1+(1+\Delta x)^2} - \arcsin 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\arcsin \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{1+(1+\Delta x)^2}}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{1 + (1+\Delta x)^2}}{\frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{1 + (1+\Delta x)^2}} \cdot \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

同理可求 $f'_+(-1) = 1, f'_-(-1) = -1$.

【1008】 $f(x) = (x-2)\arctan \frac{1}{x-2} (x \neq 2), f(2) = 0$.

解 当 $x \neq 2$ 时,

$$\begin{aligned}
f'_-(x) &= f'_+(x) \\
&= \arctan \frac{1}{x-2} + \frac{x-2}{1 + \left(\frac{1}{x-2}\right)^2} \left[-\frac{1}{(x-2)^2}\right] \\
&= \arctan \frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{(x-2)^2 + 1}.
\end{aligned}$$

当 $x = 2$ 时,

$$\begin{aligned}
f'_+(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \arctan \frac{1}{\Delta x} = \frac{\pi}{2}, \\
f'_-(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \arctan \frac{1}{\Delta x} = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

【1009】 当 $x \neq 0$ 时函数 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ 及 $f(0) = 0$, 证明:

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 但在此点既无左侧导数, 又无右侧导数.

证 因为

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

所以, $f(x)$ 在 $x = 0$ 点连续.

其次, 因为

$$\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

显然 $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \sin \frac{1}{\Delta x}$ 及 $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \sin \frac{1}{\Delta x}$ 均不存在. 因此, $f(x)$ 在 $x=0$ 点即无左导数也无右导数.

【1009. 1】 设 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类不连续点,

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - 0)}{h},$$

及
$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h},$$

称作函数 $f(x)$ 在点 x_0 的广义单侧导数(相应地为左、右侧).

求函数 $f(x)$ 在不连续点 x_0 处的 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$. 若:

(1) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x^3}{x}};$

(2) $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x};$

(3) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$

解 (1) $x=0$ 为 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x}$ 的不连续点, 且为第一类不连续点.

$$f(0+0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{1+x} = 1,$$

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} (-\sqrt{1+x}) = -1,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的广义左侧导数

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0-0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{\frac{\sqrt{h^2 + h^3}}{h} + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{1 - \sqrt{1+h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h}{h(1 + \sqrt{1+h})} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

广义右侧导数为

$$\begin{aligned}
 f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0+0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\frac{\sqrt{h^2+h^3}}{h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

注: 原题误为 $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x^3}{x}}$, 此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 的左侧无定义.

(2) $x=1$ 为 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 的不连续点, 且为第一类不连续.

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \arctan \frac{1+x}{1-x} = -\frac{\pi}{2},$$

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \arctan \frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{2},$$

$f(x)$ 在 $x=1$ 处的广义左侧导数为

$$\begin{aligned}
 f'_-(1) &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(1+h) - f(1-0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{\arctan \frac{2+h}{-h} - \frac{\pi}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{\arctan \frac{-h}{2+h}}{-h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{\arctan \frac{-h}{2+h}}{\frac{-h}{2+h}} \cdot \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$f(x)$ 在 $x=1$ 处的广义右侧导数为

$$\begin{aligned}
 f'_+(1) &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(1+h) - f(1+0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\arctan \frac{2+h}{-h} + \frac{\pi}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\arctan \frac{h}{2+h}}{h}.
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\arctan \frac{h}{2+h}}{\frac{h}{2+h}} \cdot \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2}.$$

(3) $x=0$ 为 $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 的不连续点, 且为第一类不连续点.

$$f(0+0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0,$$

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的广义左侧导数为

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0-0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{\frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-e^{\frac{1}{h}}}{h(1+e^{\frac{1}{h}})} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处的广义右侧导数为

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0+0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}}{h} \quad (\text{令 } t = \frac{1}{h}, \text{ 则 } t \rightarrow +\infty), \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{1+e^t} = 0. \end{aligned}$$

【1010】 设:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \leq x_0; \\ ax+b, & \text{若 } x > x_0. \end{cases}$$

为使函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续且可微, 应如何选取系数 a 和 b ?

解 因为

$$f(x_0) = x_0^2 = f(x_0 - 0),$$

$$f(x_0 + 0) = ax_0 + b.$$

所以当 $x_0^2 = ax_0 + b$ 时,

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续

又 $f'_-(x_0) = 2x_0, f'_+(x_0) = a.$

所以当 $a = 2x_0$ 且 $x = ax_0 + b$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 可微分. 故

$$a = 2x_0, \quad b = -x_0^2.$$

【1011】 设

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \leq x_0; \\ ax + b, & \text{若 } x > x_0. \end{cases}$$

其中函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 为左侧可微, 应选择什么样的系数 a 和 b 使函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续且可微?

解 因为

$$F(x_0) = f(x_0) = F(x_0 - 0),$$

$$F(x_0 + 0) = ax_0 + b,$$

又 $F'_-(x_0) = f'_-(x_0), F'_+(x_0) = a.$

所以当 $ax_0 + b = f(x_0)$ 且 $a = f'_-(x_0)$ 时,

$F(x)$ 在 x_0 连续且可微,

从而所求系数为

$$a = f'_-(x_0), b = f(x_0) - x_0 f'_-(x_0).$$

【1012】 选择合适的参数 A 和 c , 用下述立方抛物线

$$y = A(x-a)(x-b)(x-c),$$

在区间 $a \leq x \leq b$ 上, 将两条半直线:

$$y = k_1(x-a), (-\infty < x < a).$$

及 $y = k_2(x-b), (b < x < +\infty).$

光滑地连接起来.

解 对于立方抛物线有

$$y' = A[(x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)],$$

此即曲线上任一点切线的斜率. 当接点处两条曲线的切线重合时, 它们就平滑地联接起来. 于是

1° 在点 a 处,有

$$A(a-b)(a-c) = k_1,$$

2° 在点 b 处,有

$$A(b-a)(b-c) = k_2,$$

联立上面两方程解之得

$$A = \frac{k_1 + k_2}{(b-a)^2}, c = \frac{ak_2 + bk_1}{k_1 + k_2}.$$

【1013】 请用抛物线

$$y = a + bx^2 \quad (|x| \leq c),$$

(其中 a 和 b 为未知参数) 去补充曲线

$$y = \frac{m^2}{|x|} \quad (|x| > c),$$

的部分,使所得的是一条平滑曲线.

解 显然 $c > 0$,

要使两曲线平滑地连接起来,必须在 $x = \pm c$ 处两曲线有相同的纵坐标且它们的切线斜率相等,于是有

$$a + bc^2 = \frac{m^2}{c} \text{ 及 } 2bc = -\frac{m^2}{c^2},$$

联立解之得

$$a = \frac{3m^2}{2c}, b = -\frac{m^2}{2c^3}.$$

【1014】 如果(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有导数,而函数 $g(x)$ 在此点没有导数;(2) 两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 都无导数,问能否断定两个函数之和 $F(x) = f(x) + g(x)$ 在点 $x = x_0$ 没有导数?

解 (1) 能. 反设 $F(x)$ 在 $x = x_0$ 处有导数,又由假设知 $f(x)$ 在 x_0 处有导数,则 $g(x) = F(x) - f(x)$ 在 x_0 处也有导数,这与假设相矛盾.

(2) 不能. 例如

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2}, g(x) = \frac{x - |x|}{2}.$$

在 $x = 0$ 处均无导数,但 $F(x) = f(x) + g(x) = x$ 在 $x = 0$

处可导且导数为 1.

【1015】 如果(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数, 而函数 $g(x)$ 在此点无导数; (2) 两个在函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 点 x_0 处都无导数, 能否确定两个函数的乘积 $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ 在点 $x = x_0$ 没有导数?

设 $x_0 = 0$, 研究以下例子:

$$(1) f(x) = x, g(x) = |x|;$$

$$(2) f(x) = |x|, g(x) = |x|.$$

解 (1) 不能. 例如

$f(x) = x$ 在 $x = 0$ 处有导数,

$g(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处没有导数.

而它们的积

$$F(x) = f(x)g(x) = x|x|,$$

在点 $x = 0$ 处有导数, 事实上

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(0 + \Delta x) - F(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x |\Delta x|}{\Delta x} = 0. \end{aligned}$$

(2) 不能. 例如

$$f(x) = |x|, g(x) = |x|,$$

在点 $x = 0$ 处都没有导数, 但它们的积

$$F(x) = f(x) \cdot g(x) = |x|^2 = x^2,$$

在点 $x = 0$ 处有导数, 且

$$F'(0) = 2x|_{x=0} = 0.$$

【1016】 如果(1) 函数 $f(x)$ 在点 $x = g(x_0)$ 有导数, 而函数 $g(x)$ 在点 $x = x_0$ 无导数; (2) 函数 $f(x)$ 在点 $x = g(x_0)$ 无导数, 而函数 $g(x)$ 在点 $x = x_0$ 有导数; (3) 函数 $f(x)$ 在点 $x = g(x_0)$ 无导数和函数 $g(x)$ 在点 $x = x_0$ 无导数, 问函数 $F(x) = f[g(x)]$ 在已知点 $x = x_0$ 的可微性如何?

设 $x_0 = 0$, 研究以下例子:

$$(1) f(x) = x^2, g(x) = |x|;$$

$$(2) f(x) = |x|, g(x) = x^2;$$

$$(3) f(x) = 2x + |x|, g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|.$$

解 (1) $F'(x_0)$ 可能存在, 也可能不存在.

例如, 考察函数 $f(x), g(x)$ 及点 x_0 如下:

① $f(x) = x^2, g(x) = |x|$ 在点 $x = 0$ 处 $g(0) = 0, f'(0) = 0, g'(0)$ 不存在, 而

$$F(x) = f(g(x)) = (|x|)^2 = x^2,$$

在 $x = 0$ 处可导, 且 $F'(0) = 0$, 这是 $F'(x_0)$ 存在例子.

② $f(x) = x, g(x) = |x|$, 在点 $x = 0$ 处 $g(0) = 0, f'(0) = 1, g'(0)$ 不存在, 而

$$F(x) = f(g(x)) = |x|,$$

$F'(0)$ 不存在, 这是 $F'(x_0)$ 不存在的例子.

(2) $F'(x_0)$ 可能存在, 也可能不存在. 例如

① $f(x) = |x|, g(x) = x^2$, 在点 $x = 0, g(0) = 0, f'(0)$ 不存在, $g'(0) = 0$, 而

$$F(x) = f[g(x)] = |x^2| = x^2, F'(0) = 0,$$

这是 $F'(x_0)$ 存在的例子.

② $f(x) = |x|, g(x) = x$, 在点 $x = 0$ 处 $g(0) = 0, f'(0)$ 不存在, $g'(0) = 1$, 而

$$F(x) = f(g(x)) = |x|,$$

$F'(0)$ 不存在.

(3) $F'(x_0)$ 可能存在, 也可能不存在, 例如

① $f(x) = 2x + |x|, g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$, 在点 $x = 0$ 处, $g(0) = 0, f'(0)$ 及 $g'(0)$ 均不存在, 但

$$\begin{aligned} F(x) &= f[g(x)] \\ &= 2\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|\right) + \left|\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|\right| \\ &= x. \end{aligned}$$

故 $F'(0) = 1$.

② $f(x) = |x|, g(x) = |x|$, 在点 $x = 0$ 处 $g(0) = 0, f'(0)$,

$g'(0)$ 均不存在, 而

$$F(x) = f[g(x)] = |x|,$$

$F'(0)$ 也不存在.

【1017】 函数 $y = x + \sqrt[3]{\sin x}$ 的图形在哪些点处有垂直切线? 作出此图形.

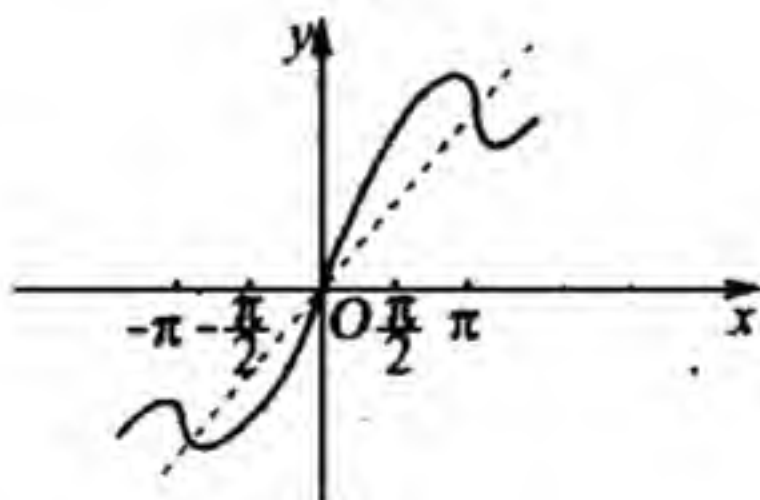
解 $y' = 1 + \frac{\cos x}{3\sqrt{\sin x}} \quad (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

当 $x = k\pi$ 时, 根据定义

$$\begin{aligned} y' |_{x=k\pi} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k\pi + \Delta x + \sqrt[3]{\sin(k\pi + \Delta x)} - k\pi}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \sqrt[3]{\frac{(-1)^k}{(\Delta x)^2} \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}} \right) = \infty. \end{aligned}$$

故当 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, 图形有垂直切线.

当 $x = k\pi$ 时, $y = k\pi$, 图形关于坐标原点对称. 如 1017 题图所示



1017 题图

【1018】 函数 $f(x)$ 在其不连续点上可否有 (1) 有穷导数; (2) 无穷导数?

研究下例: $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

解 (1) 不能. 否则将推出其连续性.

(2) 能. 例如, 函数

$$y = f(x) = \operatorname{sgn} x,$$

在点 $x = 0$ 处不连续, 但

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{|\Delta x|}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{|\Delta x|} = +\infty.$$

【1019】 如果函数 $f(x)$ 在有限区间 (a, b) 可微, 且 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$, 则是否一定有

- (1) $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty$;
 (2) $\lim_{x \rightarrow a+0} |f'(x)| = +\infty$?

研究下例: $f(x) = \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$ (当 $x \rightarrow 0$ 时).

解 (1) 一般地说, 不能保证

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty.$$

例如定义在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的函数.

$$f(x) = \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x},$$

显然, $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上可微, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \infty.$$

但是 $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x},$

对于数列 $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \quad (n = 1, 2, \dots),$

显然有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0,$

且 $f'(x_n) = 0,$

所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x_n) = 0.$

因而 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty$ 不成立.

(2) 上面的例子也说明, 一般地

$$\lim_{x \rightarrow a+0} |f'(x)| = +\infty,$$

不能成立.

【1020】 如果函数 $f(x)$ 在有限区间 (a, b) 可微, 且 $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$

$= \infty$, 则是否一定有

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty?$$

研究下例: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (当 $x \rightarrow 0$ 时).

解 不一定. 例如

$$f(x) = \sqrt[3]{x},$$

它在 $(0, b)$ ($b > 0$) 上可微, 且 $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

显然 $\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = +\infty$,

然而 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} = 0$.

【1021】 假设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 可微, 且存在 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 由此可以得出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在吗?

研究下例: $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$.

解 不能. 例如, 函数

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x},$$

在 $(0, +\infty)$ 上可微分

$$f'(x) = 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2},$$

且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} = 0$,

但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 不存在.

【1022】 假设有界函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 可微, 且存在 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$, 能否由此推导出存在有穷的或无穷的 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?

研究例子: $f(x) = \cos(\ln x)$.

解 不能. 例如

$$f(x) = \cos(\ln x),$$

它在 $(0, +\infty)$ 上有界且可微分, 其导数为

$$f'(x) = -\frac{\sin(\ln x)}{x}.$$

显然 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$,

然后, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在.

【1023】 对函数之间的不等式能否逐项微分?

解 不能. 例如

设 $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2 + 1$,

在 $(-\infty, 1)$ 上有 $f(x) \leq g(x)$,

但在此区间上没有

$$f'(x) \leq g'(x).$$

因为 $f'(x) = 2, g'(x) = 2x$.

【1024】 推导出表示下述两个和式的公式:

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1},$$

及 $Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}.$

提示: 研究 $(x + x^2 + \cdots + x^n)'$.

解 设

$$\sigma_n = x + x^2 + \cdots + x^n, \quad \text{①}$$

$$\tau_n = 1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + \cdots + nx^n, \quad \text{②}$$

则 $\sigma'_n = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} = P_n,$

$$\tau'_n = 1^2 + 2^2x + \cdots + n^2x^{n-1} = Q_n.$$

而 $\sigma_n = \frac{x(1-x^n)}{1-x},$

$$\begin{aligned} \text{所以 } P_n = \sigma'_n &= \left[\frac{x(1-x^n)}{1-x} \right]' \\ &= \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}, \end{aligned}$$

而 $\tau_n = x(1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}) = xP_n.$

$$\begin{aligned} \text{所以 } Q_n = \tau'_n &= P_n + xP'_n \\ &= \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} + x \left[\frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \right]' \\ &= \frac{1 + x - (n+1)^2x^n + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

【1025】 推导出表示下列和式的公式:

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx.$$

及 $T_n = \cos x + 2\cos 2x + \cdots + n\cos nx.$

解
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \left[2\sin \frac{x}{2} \sin x + 2\sin \frac{x}{2} \sin 2x \right. \\ &\quad \left. + \cdots + 2\sin \frac{x}{2} \sin nx \right] \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \left[\left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) + \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\cos \frac{2n-1}{2}x - \cos \frac{2n+1}{2}x \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x \right) \\ &= \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

所以
$$S_n = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}},$$

又
$$\begin{aligned} T_n = S'_n &= \left[\frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \right]' \\ &= \frac{\left[n\cos \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x + (n+1)\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{n+1}{2}x \right] \sin \frac{x}{2}}{2\sin^2 \frac{x}{2}} \\ &\quad - \frac{\cos \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{2\sin^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2}x - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

故 $T_n = \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2}x - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}$

【1025. 1】 推导出表示和式的公式:

$$S_n = \operatorname{ch} x + 2 \operatorname{ch} 2x + \cdots + n \operatorname{ch} nx$$

提示: $S_n = (\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \cdots + \operatorname{sh} nx)'$.

解 设 $T_n = \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \cdots + \operatorname{sh} nx$,

则 $T_n = \frac{1}{2}[(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - (e^{-x} + e^{-2x} + \cdots + e^{-nx})]$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{e^x(1 - e^{nx})}{1 - e^x} - \frac{e^{-x}(1 - e^{-nx})}{1 - e^{-x}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{e^x(1 - e^{nx})}{1 - e^x} + \frac{1 - e^{nx}}{1 - e^x} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1 + e^x - e^{(n+1)x} - e^{-nx}}{1 - e^x},$$

从而 $S_n = T'_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + e^x - e^{(n+1)x} - e^{-nx}}{1 - e^x} \right)'$

$$= \frac{1}{2} \frac{(e^x - (n+1)e^{(n+1)x} + ne^{-nx})(1 - e^x) + (1 + e^x - e^{(n+1)x} - e^{-nx})e^x}{(1 - e^x)^2}$$

$$= \frac{2e^x - (n+1)e^{(n+1)x} + ne^{(n+2)x} + ne^{-nx} - (n+1)e^{-(n-1)x}}{2(1 - e^x)^2}.$$

【1026】 利用恒等式

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}},$$

推导出表示和式的公式:

$$S_n = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}.$$

解 对等式

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}, \quad (1)$$

两边分别求导数得

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \\ & -\frac{1}{4} \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \cdots \cos \frac{x}{2^n} - \cdots \\ & -\frac{1}{2^n} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^{n-1}} \cdot \sin \frac{x}{2^n} \\ & = \frac{\cos x \sin \frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^n} \sin x \cdot \cos \frac{x}{2^n}}{2^n \sin^2 \frac{x}{2^n}}. \end{aligned} \quad (2)$$

② ÷ ① 得

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} - \cdots - \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n} \\ & = \cot x - \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n}, \end{aligned}$$

因此
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n} \\ & = \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} - \cot x. \end{aligned}$$

【1027】 证明可微分的偶函数的导数是奇函数, 而可微分的奇函数的导数是偶函数. 请对此事实给出几何解释.

证 设 $f(x)$ 为偶函数, 则

$$f(x) = f(-x),$$

两端对 x 求导数得

$$f'(x) = -f'(-x),$$

即 $f'(-x) = -f'(x),$

亦即 $f'(x)$ 为奇函数.

同理可证: 可微分的奇函数的导函数为偶函数.

这个事实说明: 关于 Oy 轴对称的图形, 其对称点的切线也关

于 Oy 轴对称;关于原点对称的图形,其对称点的切线互相平行.

【1028】 证明可微分的周期函数的导数仍然是具有同样周期的周期函数.

证 设 $f(x)$ 为周期函数,周期为 T

则 $f(x+T) = f(x)$,

两边对 x 求导数,得

$$f'(x+T) = f'(x),$$

即 $f'(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

【1029】 如果圆半径以 2 厘米 / 秒的速度均匀增大,当圆半径 $R = 10$ 厘米时,圆面积以什么样的速度增加?

解 设圆的面积为 S

则 $S = \pi R^2$,

且 $\frac{dR}{dt} = 2$,

所以 $\frac{dS}{dt} = 2\pi R \frac{dR}{dt} \Big|_{R=10} = 40\pi$ (平方厘米 / 每秒).

故当 R 为 10 厘米时,圆面积的增加速度为 40π 平方厘米 / 每秒.

【1030】 长方形的一边 $x = 20$ 米,另一边 $y = 15$ 米,如果第一边以 1 米 / 秒的速度减少,而第二边以 2 米 / 秒的速度增加,问此长方形的面积及对角线变化的速度是多少?

解 面积为 $S = xy$, 对角线的长为

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (x > 0, y > 0),$$

对时间 t 求导数有

$$\frac{dS}{dt} = x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt},$$

及 $\frac{dl}{dt} = \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

按题设有 $x = 20, y = 15$,

$$\frac{dx}{dt} = -1, \frac{dy}{dt} = 2,$$

代入上面两式得

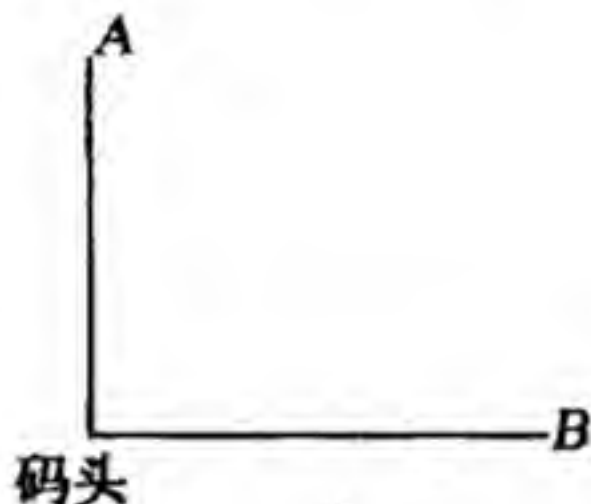
$$\frac{dS}{dt} = 20 \cdot 2 + 15 \cdot (-1) = 25,$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{-20 + 2 \cdot 15}{\sqrt{20^2 + 15^2}} = 0.4,$$

于是,该长方形的面积以 25 平方米 / 秒的速度变化而对角线以 0.4 米 / 每秒的速度变化.

【1031】 轮船 A 和 B 由同一码头同时出发, A 船向北, B 船向东, 如果 A 船的航速为 30 千米 / 小时, B 船的航速为 40 千米 / 小时, 问二船之间的距离以什么样的速度增加?

解 记时间为 t (小时), A 与 B 离码头的距离为 $30t$ 千米与 $40t$ 千米故两船间的距记为



1031 题图

$$d(t) = \sqrt{(30t)^2 + (40t)^2} = 50t (\text{千米}),$$

故两船间的距离增加的速度为 $d'(t) = 50$ (千米 / 小时).

【1032】 假设

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } 0 \leq x \leq 2; \\ 2x - 2, & \text{若 } 2 < x < +\infty, \end{cases}$$

$S(x)$ 表示由曲线 $y = f(x)$ 、轴 Ox 和经过点 x ($x \geq 0$) 垂直于 Ox 的直线所围成的面积. 请写出函数 $S(x)$ 解析公式, 求出导数 $S'(x)$, 并作出函数 $y = S'(x)$ 的图形.

解 当 $0 \leq x \leq 2$ 时,

$$S(x) = \frac{1}{2}x^2,$$

当 $2 < x < +\infty$ 时,

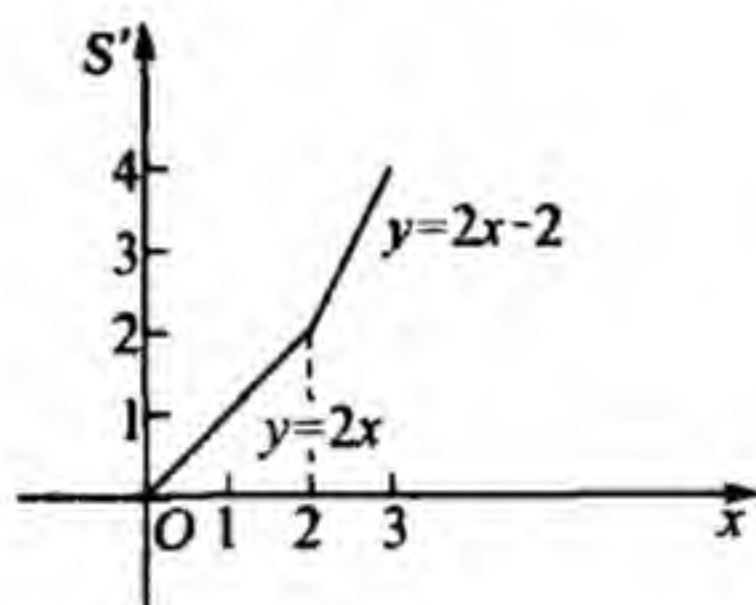
$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{2}(x-2)[2+(2x-2)]$$

$$= x^2 - 2x + 2,$$

即
$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x \leq 2; \\ x^2 - 2x + 2, & 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

所以
$$S'(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 2 \text{ 时,} \\ 2x - 2, & \text{当 } 2 < x < +\infty \text{ 时.} \end{cases}$$

$S'(x)$ 的图形如 1032 题图所示



1032 题图

【1033】 函数 $S(x)$ 是由圆弧 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, 轴 Ox 及经过点 O 和 x ($|x| \leq a$) 而与轴 Ox 垂直的两条直线所围成的面积, 请写出函数 $S(x)$ 的解析公式, 求出导数 $S'(x)$, 并作出这个导数的图形.

解 若 $S(x)$ 等于一个直角三角形的面积加上一个中心角为 α 的扇形的面积, 其中 $\sin \alpha = \frac{|x|}{a}$, 故

当 $0 < |x| \leq a$ 时,

$$S(x) = \frac{|x|}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{|x|}{a}.$$

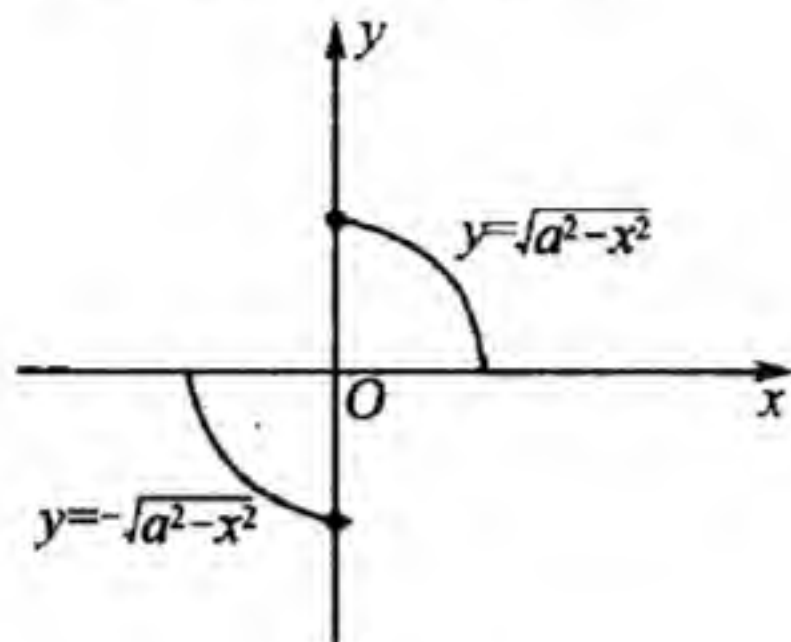
于是
$$S'(x) = \frac{1}{2} \frac{|x|}{x} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{|x|}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$+ \frac{a^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} \frac{|x|}{x}$$

$$= \frac{|x|}{x} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - x^2} \operatorname{sgn} x \quad (0 < |x| \leq a).$$

$y = S'(x)$ 的图形如 1033 题图所示



1033 题图

§ 2. 反函数的导数, 用参数表示的函数的导数, 隐函数的导数

1. 反函数的导数 若具有导数 $f'(x) \neq 0$ 的可微分函数 $y = f(x) (a < x < b)$ 具有单值连续反函数 $x = f^{-1}(y)$, 则此反函数也可微分, 且公式 $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ 成立.

2. 用参数表示的函数的导数

若方程组:
$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (\alpha < t < \beta).$$

(其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都是可微分的函数, 且 $\varphi'(t) \neq 0$) 在某个域内确定 y 是 x 的单值可微分函数: $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$, 则这个函数的导数存在且可以根据以下公式求出: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

3. 隐函数的导数

如果可微分函数 $y = y(x)$ 满足方程

$$F(x, y) = 0,$$

则此隐函数的导数 $y' = y'(x)$ 可由以下方程求出:

$$\frac{d}{dx}[F(x, y)] = 0,$$

其中 $F(x, y)$ 被当作变量 x 的复合函数.

【1034】 证明: 由方程 $y^3 + 3y = x$ 确定的单值函数 $y = y(x)$ 存在, 并求出其导数 $y'(x)$.

证 对于函数

$$x = f(y) = y^3 + 3y,$$

有 $\frac{dx}{dy} = f'(y) = 3(y^2 + 1) > 0 (-\infty < y < +\infty)$.

所以 $f(y)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是严格增加的函数, 故存在单值的反函数 $y = y(x) (-\infty < x < +\infty)$, 且

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3(y^2 + 1)}.$$

【1035】 证明: 由方程

$$y - \epsilon \sin y = x \quad (0 \leq \epsilon < 1),$$

确定的单值函数 $y = y(x)$ 存在, 并求出它的导数 y'_x .

证 对于函数 $x = f(y) = y - \epsilon \sin y$,

有 $\frac{dx}{dy} = f'(y) = 1 - \epsilon \cos y > 0 \quad (-\infty < y < +\infty)$.

故 $f(y)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格增加的, 从而存在单值的反函数 $y = y(x)$, 且 $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 - \epsilon \cos y}$.

【1036】 若

$$(1) y = x + \ln x \quad (x > 0);$$

$$(2) y = x + e^x;$$

$$(3) y = \operatorname{sh} x;$$

$$(4) y = \operatorname{th} x.$$

确定它们的反函数 $x = x(y)$ 的存在域, 并求出它们的导数.

解 (1) 由 $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x} > 0 \quad (x > 0)$,

知, 有单值连续的反函数 $x = x(y)$ 其定义域为 $-\infty < y < +\infty$, 而导函数为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}.$$

(2) 由 $y'_x = 1 + e^x > 0$ 知, 有单值连续的反函数 $x = x(y)$, 其定义域为 $-\infty < y < +\infty$, 导函数为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1 + e^x} = \frac{1}{1 - x + y}.$$

(3) 由 $y'_x = \operatorname{ch} x > 0$ 知, 有单值连续的反函数 $x = x(y)$, 其定义域为 $-\infty < y < +\infty$, 而导函数为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

(4) 由 $y'_x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} > 0$ 知有单值连续的反函数 $x = x(y)$, 其定义域为 $-1 < y < 1$, 其导函数为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x} = \operatorname{ch}^2 x.$$

而 $y^2 = \operatorname{th}^2 x = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$

所以 $\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1 - y^2},$

故 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 - y^2}.$

【1037】 若

$$(1) y = 2x^2 - x^4;$$

$$(2) y = \frac{x^2}{1 + x^2};$$

$$(3) y = 2e^{-x} - e^{-2x}.$$

请选出反函数 $x = x(y)$ 的单值连续的各枝, 求出它们的导数并作其图形.

解 (1) 由 $x^4 - 2x^2 + y = 0,$

得 $x^2 = 1 \pm \sqrt{1 - y}.$

所以反函数的单值连续的各枝:

$$f_1(y) = -\sqrt{1 + \sqrt{1-y}} \quad (-\infty < y \leq 1),$$

$$f_2(y) = -\sqrt{1 - \sqrt{1-y}} \quad (0 \leq y \leq 1),$$

$$f_3(y) = \sqrt{1 - \sqrt{1-y}} \quad (0 \leq y \leq 1),$$

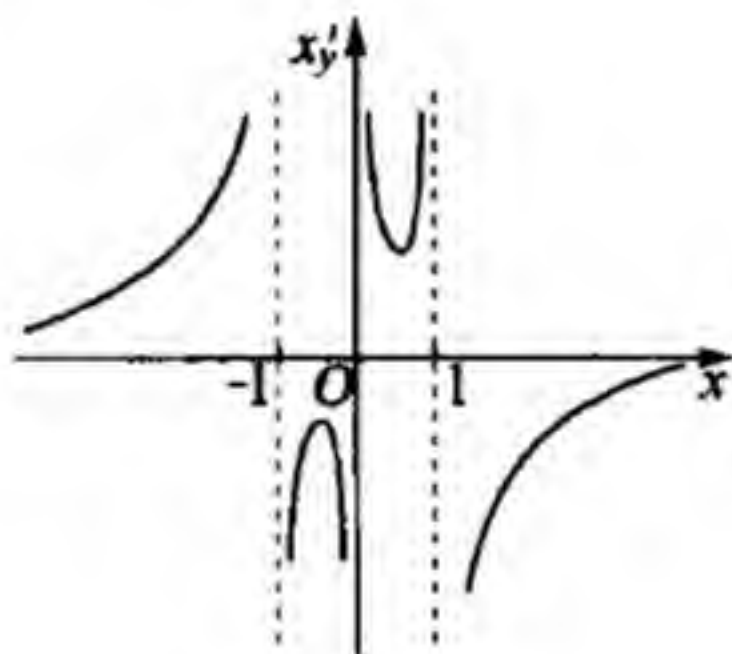
$$f_4(y) = \sqrt{1 + \sqrt{1-y}} \quad (-\infty < y \leq 1).$$

由 $\frac{dy}{dx} = 4x - 4x^3,$

得 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{4x(1-x^2)}.$

从而 $f'_i(y) = \frac{1}{4x(1-x^2)} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$

如 1037 题图 1



1037 题图 1

(2) 由 $\frac{x^2}{1+x^2} = y,$

得 $x^2 = \frac{y}{1-y}.$

反函数的单值连续的各枝为:

$$f_1(y) = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}, \quad (0 \leq y \leq 1).$$

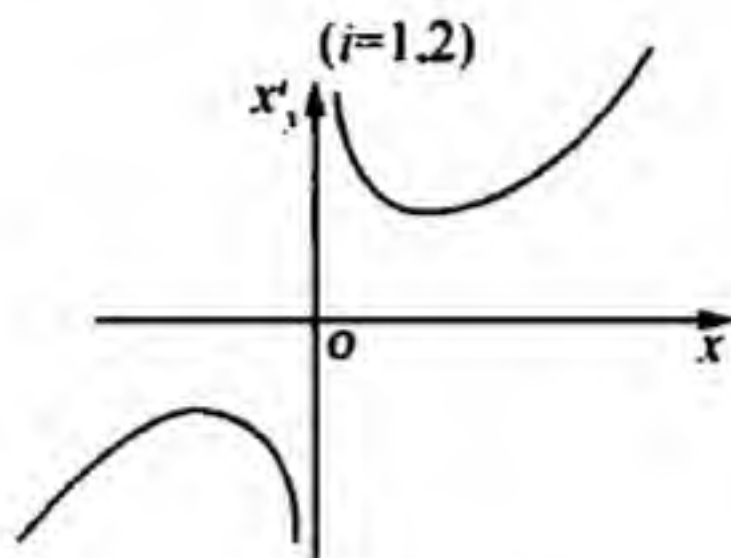
$$f_2(y) = \sqrt{\frac{y}{1-y}},$$

由 $y'_x = \frac{2x}{(1+x^2)^2},$

有
$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{(1+x^2)^2}{2x},$$

从而
$$f'_i(y) = \frac{(1+x^2)^2}{2x} \quad (i=1,2).$$

如 1037 题图 2



1037 题图 2

(3) 由 $y = 2e^{-x} - e^{-2x},$

得 $e^{-x} = 1 \pm \sqrt{1-y}.$

所以反函数的单值连续的各枝为

$$f_1(y) = -\ln(1 + \sqrt{1-y}), \quad (-\infty < y \leq 1).$$

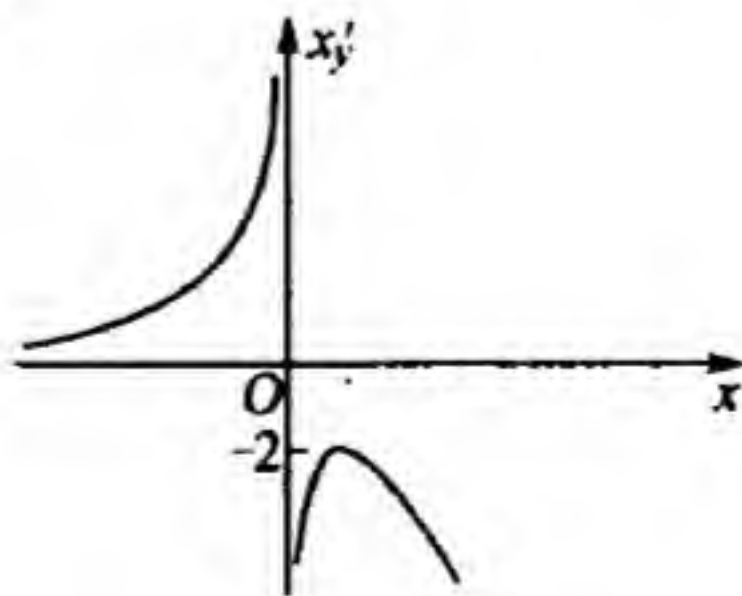
$$f_2(y) = -\ln(1 - \sqrt{1-y}), \quad (0 < y \leq 1).$$

由 $\frac{dy}{dx} = -2e^{-x} + 2e^{-2x},$

有
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{2(e^{-2x} - e^{-x})},$$

故
$$f'_i(y) = \frac{1}{2(e^{-2x} - e^{-x})} \quad (i=1,2).$$

如 1037 题图 3



1037 题图 3

【1038】 若 $x = -1 + 2t - t^2$, $y = 2 - 3t + t^3$. 作出函数 $y = y(x)$ 的略图, 并求其导数 y'_x , 当 $x = 0$ 及 $x = -1$ 时, $y'_x(x)$ 等于多少? 在什么点 $M(x, y)$ 处导数 $y'_x(x) = 0$?

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3 + 3t^2}{2 - 2t} = -\frac{3}{2}(1 + t).$

当 $t = -1$, 即 $x = -4, y = 4$ 时, $y'_x(x) = 0$;

当 $x = 0$ 时, $t = 1$, 此时 $y'_x(x) = -3$;

当 $x = -1$ 时, $t = 0$ 或 $t = 2$, 此时

$$y'_x(x) = -\frac{3}{2} \text{ 或 } y'_x(x) = -\frac{9}{2}.$$

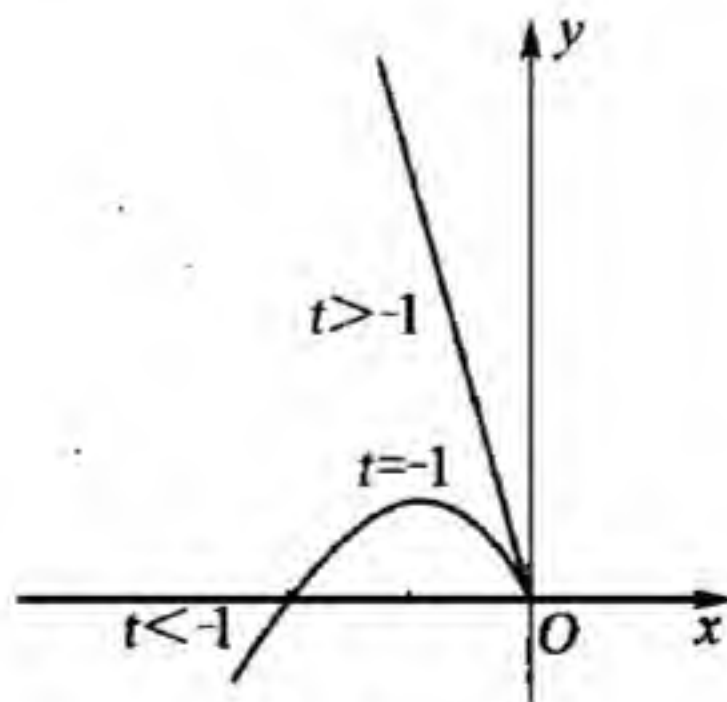
列表

t	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
y	0	4	2	0	4	20	54

当 $t < -1$ 时 $\frac{dy}{dx} > 0$, 函数 y 随自变量增加而增加, 曲线上升.

当 $t > -1$ 时 $\frac{dy}{dx} < 0$, 曲线下降.

如 1038 题图



1038 题图

求出导数 y'_x (参数为正数) (1039 ~ 1046).

【1039】 $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}, y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}.$

解 $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{6\sqrt[3]{t^2} \cdot \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}},$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{6\sqrt{t} \sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}}.$$

于是 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \sqrt[6]{\frac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}} \quad (t > 0, t \neq 1).$

【1040】 $x = \sin^2 t, y = \cos^2 t.$

解 $\frac{dy}{dt} = -2\sin t \cos t, \frac{dx}{dt} = 2\sin t \cos t.$

所以 $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin t \cos t}{2\sin t \cos t} = -1 \quad (0 < x < 1).$

【1041】 $x = a \cos t, y = b \sin t.$

解 $\frac{dy}{dt} = b \cos t, \frac{dx}{dt} = -a \sin t,$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t \quad (0 < |t| < \pi).$$

【1042】 $x = a \cosh t, y = b \sinh t.$

解 $\frac{dy}{dt} = b \cosh t, \frac{dx}{dt} = a \sinh t,$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \cosh t}{a \sinh t} = \frac{b}{a} \coth t \quad (t \neq 0).$$

【1043】 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t.$

解 $\frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t,$

$$\frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\tan t$$

$$(t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数}).$$

【1044】 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \cot \frac{t}{2}$
 $(t \neq 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

【1045】 $x = e^{2t} \cos^2 t, y = e^{2t} \sin^2 t.$

解 $\frac{dy}{dt} = 2e^{2t} \sin^2 t + 2e^{2t} \sin t \cos t$
 $= 2e^{2t} \sin t (\sin t + \cos t)$
 $\frac{dx}{dt} = 2e^{2t} \cos t (\cos t - \sin t)$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2t} \sin t (\sin t + \cos t)}{2e^{2t} \cos t (\cos t - \sin t)}$
 $= \frac{\sin t \cdot \sqrt{2} \sin(t + \frac{\pi}{4})}{\cos t \cdot \sqrt{2} \cos(t + \frac{\pi}{4})} = \tan t \cdot \tan(t + \frac{\pi}{4})$
 $(t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, t \neq k\pi + \frac{\pi}{4}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

【1046】 $x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$

解 $\frac{dy}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{1+t^2}}} \left[-\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} \right] = \frac{\operatorname{sgn} t}{(1+t^2)},$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{1+t^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}.$

于是 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\operatorname{sgn} t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = \operatorname{sgn} t \quad (0 < |t| < +\infty).$

【1047】 证明:由方程组

$$x = 2t + |t|, y = 5t^2 + 4t|t|,$$

确定的函数 $y = y(x)$ 在 $t = 0$ 时可微分,但它在此点的导数不能

用普通公式求出.

证 当 t 由 0 变化到 Δt 时, x 由 0 变化到 $\Delta x = 2\Delta t + |\Delta t|$,
 y 由 0 变化到 $\Delta y = 5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|$

$$\begin{aligned}\text{于是 } \left. \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{x=0} &= \frac{5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|}{2\Delta t + |\Delta t|} \\ &= \begin{cases} 3\Delta t & \Delta t > 0, \\ \Delta t & \Delta t < 0, \end{cases}\end{aligned}$$

从而 $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 0, (\Delta t \rightarrow 0),$

即 $y = y(x)$ 当 $t = 0$ 时可微分, 但由于 $|t|$ 当 $t = 0$ 时不可微, 因而 $\frac{dx}{dt}$ 及 $\frac{dy}{dt}$ 当 $t = 0$ 时不存在, 所以, 导数 $\frac{dy}{dx}$ 当 $t = 0$ 时的值不能从普通公式求得.

求下列隐函数的导数 y'_x (1048 ~ 1053).

【1048】 $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$

问当 $x = 2$ 且 $y = 4$ 及 $x = 2$ 且 $y = 0$ 时, y' 等于多少?

解 对 x 求导得

$$2x + 2y + 2xy'_x - 2yy'_x = 2,$$

于是 $y'_x = \frac{1-x-y}{x-y} \quad (x \neq y),$

所以 $y'_x \Big|_{\substack{x=2 \\ y=4}} = \frac{5}{2}, \quad y'_x \Big|_{\substack{x=2 \\ y=0}} = -\frac{1}{2}.$

【1049】 $y^2 = 2px$ (抛物线).

解 对 x 求导数, 得 $2yy'_x = 2p,$

所以 $y'_x = \frac{p}{y} \quad (y \neq 0),$

【1050】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (椭圆).

解 对 x 求导数, 得

$$\frac{2}{a^2}x + \frac{2}{b^2}yy'_x = 0.$$

所以 $y'_x = -\frac{b^2x}{a^2y} \quad (y \neq 0).$

【1051】 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ (抛物线).

解 两边对 x 求导数得

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} y'_x = 0.$$

所以 $y'_x = -\sqrt{\frac{y}{x}}$ ($x > 0, y > 0$).

【1052】 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (内摆线).

解 两边对 x 求导数, 得 $\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{y}} y'_x = 0$.

所以 $y'_x = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$ ($x \neq 0$).

【1053】 $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ (对数螺线).

解 对 x 求导数得

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{y'_x}{x} - \frac{y}{x^2}\right) = \frac{x + yy'_x}{x^2 + y^2}.$$

所以 $y'_x = \frac{x+y}{x-y}$ ($x \neq y, x \neq 0$).

【1054】 求出 y'_x , 若:

- (1) $r = a\varphi$ (阿基米德螺线);
- (2) $r = a(1 + \cos\varphi)$ (心脏形线);
- (3) $r = ae^{m\varphi}$ (对数螺线).

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ 为极坐标.

解 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, 其中 $r = r(\varphi)$,

$$\text{于是 } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\frac{dr}{d\varphi} \sin\varphi + r\cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi} \cos\varphi - r\sin\varphi}, \quad \textcircled{1}$$

(1) $\frac{dr}{d\varphi} = a$ 代入 ① 式得,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin \varphi + a \varphi \cos \varphi}{a \cos \varphi - a \varphi \sin \varphi} = \tan(\varphi + \operatorname{costan} \varphi).$$

(2) $\frac{dr}{d\varphi} = -a \sin \varphi$ 代入(1)得,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{-a \sin^2 \varphi + a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi}{-a \sin \varphi \cos \varphi - a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi} \\ &= -\frac{\cos 2\varphi + \cos \varphi}{\sin 2\varphi + \sin \varphi} \\ &= -\frac{2 \cos \frac{3\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{3\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}} = -\cot \frac{3\varphi}{2} \end{aligned}$$

$$\left(\varphi \neq 0, \varphi \neq \pm \frac{2\pi}{3} \right).$$

(3) $\frac{dr}{d\varphi} = a m e^{m\varphi}$ 代入①式得,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{a m e^{m\varphi} \cdot \sin \varphi + a e^{m\varphi} \cos \varphi}{a m e^{m\varphi} \cos \varphi - a e^{m\varphi} \sin \varphi} \\ &= \frac{m \sin \varphi + \cos \varphi}{m \cos \varphi - \sin \varphi} = \tan \left(\varphi + \arctan \frac{1}{m} \right). \end{aligned}$$

§ 3. 导数的几何意义

1. 切线和法线的方程

对可微分函数 $y = f(x)$ 图形上一点 $M(x, y)$ (图 7) 处的切线 MT 和法线 MN 的方程式分别具有以下形式:

$$Y - y = y'(X - x)$$

和
$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

其中 X, Y 为切线或法线的流动坐标, 而 $y' = f'(x)$ 为切点处的导数值.

2. 切线和法线线段

对于切线和法线线段:

PT 为次切线, PN 为次法线, MT 为切线, MN 为法线 (图 7)

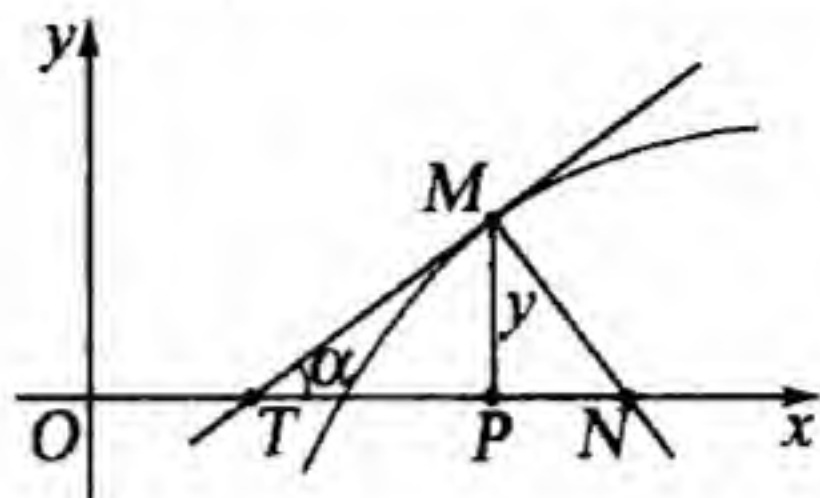


图 7

设 $\tan \alpha = y'$, 计算得出以下值:

$$PT = \left| \frac{y}{y'} \right|, PN = |yy'|,$$

$$MT = \left| \frac{y}{y'} \right| \sqrt{1+y'^2}, MN = |y| \sqrt{1+y'^2}.$$

3. 切线和切点向径之间的夹角

如果 $r = f(\varphi)$ 为极坐标系中曲线的方程, 而 β 为切线 MT 和切点 M 的向径 OM 所成的角(图 8)

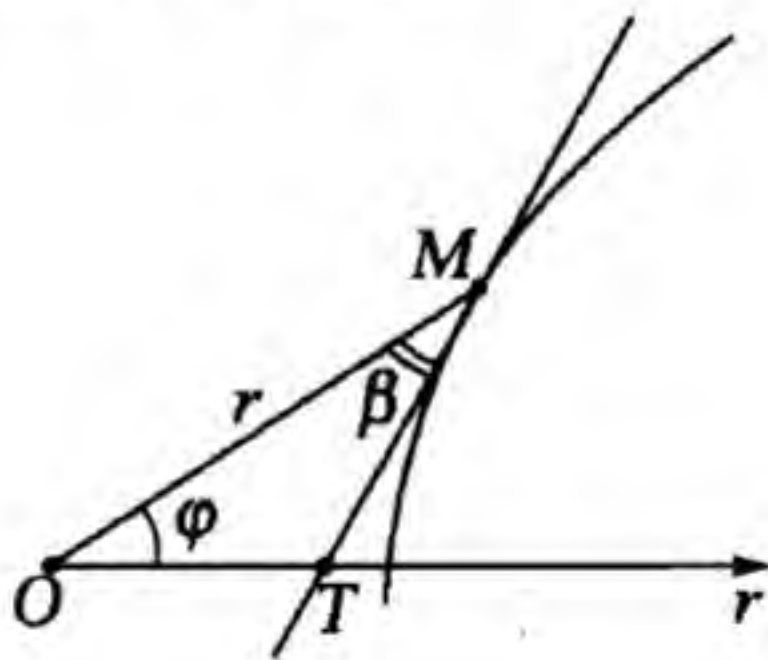


图 8

则: $\tan \beta = \frac{r}{r'}.$

【1055】 求 $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$ 在各点 $A(-1,0)$, $B(2,3)$, $C(3,0)$ 处的切线和法线方程.

解 由于

$$y'_x = \sqrt[3]{3-x} - \frac{1}{3} \frac{x+1}{\sqrt[3]{(3-x)^2}},$$

所以在 $A(-1, 0)$ 点的切线方程为 $y - 0 = y'_x|_{x=-1}(x + 1)$,

即 $y = \sqrt[3]{4}(x + 1)$.

法线方程为 $y - 0 = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x + 1)$,

即 $y = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x + 1)$.

在 $B(2, 3)$ 点的切线方程为

$$(y - 3) = y'_x|_{x=2}(x - 2),$$

即 $y = 3$.

法线方程为 $x = 2$,

由于在 $C(3, 0)$ 点 $y'_x = \infty$, 故切线方程为

$$x = 3,$$

法线方程为

$$y = 0.$$

【1056】 在曲线 $y = 2 + x - x^2$ 上哪些点的切线.

(1) 和 Ox 轴平行;

(2) 和第一象限的角平分线平行?

解 因为 $y' = 1 - 2x$.

(1) 令 $y' = 0$ 得

$$x = \frac{1}{2}, y = 2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

故在点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ 处, 其切线平行于 Ox 轴.

(2) 令 $y' = 1$, 得 $x = 0, y = 2$,

故在点 $(0, 2)$ 处, 其切线和第一象限角的平分线平行.

【1057】 证明: 抛物线

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (a \neq 0, x_1 < x_2).$$

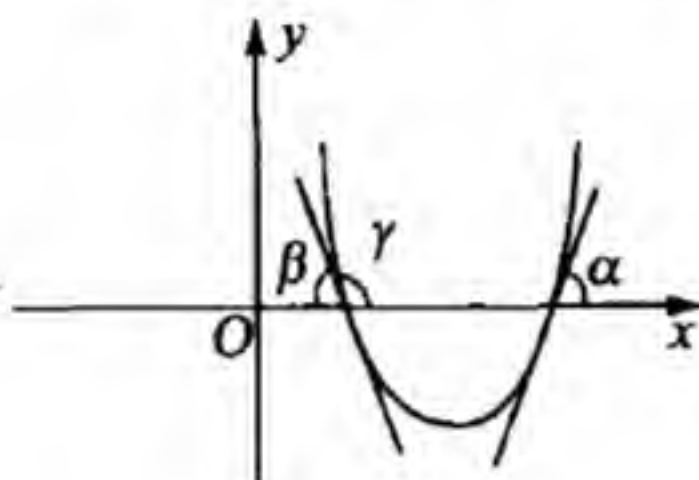
和 Ox 轴相交成彼此相等的两角 α 与 β ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$).

证 抛物线与 Ox 轴的两交点分别为 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$,

由于 $y'_x = 2ax - a(x_1 + x_2)$,

故在点 A, B 的切线的斜率为

$$\begin{aligned} k_A &= 2ax_1 - a(x_1 + x_2) \\ &= a(x_1 - x_2) = \tan\gamma = \tan(\pi - \beta), \\ k_B &= 2ax_2 - a(x_1 + x_2) = a(x_2 - x_1) = \tan\alpha. \end{aligned}$$



1057 题图

故 $\tan\beta = \tan(\pi - \gamma) = -\tan\gamma = -a(x_1 - x_2) = \tan\alpha$,
因此 $\alpha = \beta$.

【1058】 请在曲线 $y = 2\sin x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$),
上确定“曲线的坡度”(即 $|y'|$) 大于 1 的区域.

解 $y' = 2\cos x$.

要 $|y'| > 1$ 只须 $|\cos x| > \frac{1}{2}$,

即 $|x| < \frac{\pi}{3}$ 及 $\frac{2\pi}{3} < |x| \leq \pi$.

因此当

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$$

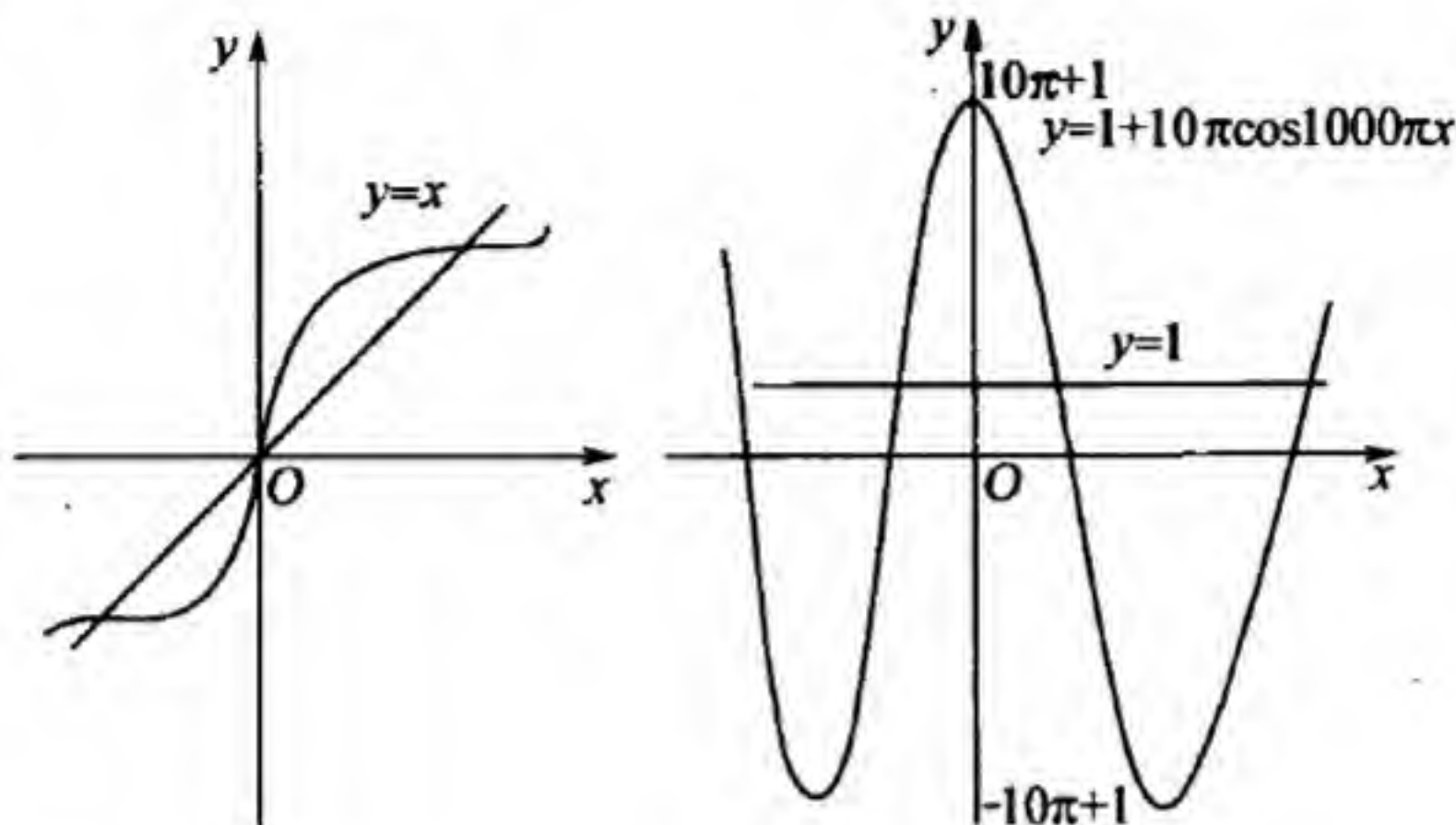
时曲线 $y = 2\sin x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) 的坡度大于 1.

【1059】 函数 $y = x$ 与 $y_1 = x + 0.01\sin 1000\pi x$ 彼此相差不大于 0.01, 问这些函数的导数之差的最大值是多少? 作出相应的图形.

解 导函数之差的最大值.

$$\max |y' - y'_1| = \max |10\pi \cdot \cos 1000\pi x| = 10\pi.$$

如 1059 题图所示



1059 题图

【1060】 曲线 $y = \ln x$ 与 Ox 轴的交角是多少？

解 曲线 $y = \ln x$ 与 Ox 轴相交于 $(1, 0)$, 设曲线与 Ox 轴的相交角为 α , 则 $\tan \alpha = y'_x|_{x=1} = \frac{1}{x}|_{x=1} = 1$,

故交角为 $\frac{\pi}{4}$.

【1061】 曲线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 的交角是多少？

解 两曲线的交点为 $(0, 0)$ 及 $(1, 1)$ 由于导数为 $y' = 2x$ 及 $y' = \frac{1}{2y}$, 故在 $(0, 0)$ 点两曲线的交角显然为 $\frac{\pi}{2}$ 在 $(1, 1)$ 点, 两切线的斜率分别为 $k_1 = 2$ 及 $k_2 = \frac{1}{2}$.

故其交角 θ 的正切为 $\tan \theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{3}{4}$,

于是 $\theta = \arctan \frac{3}{4}$.

【1062】 曲线 $y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 的交角是多少？

解 解方程组

$$\begin{cases} y = \sin x, \\ y = \cos x. \end{cases}$$

得当 $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ (k 为整数) 时, 两曲线相交, 其次, 求两曲线在 $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ 处切线的斜率为

$$k_1 = (\sin x)' \big|_{x=k\pi+\frac{\pi}{4}} = (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$k_2 = (\cos x)' \big|_{x=k\pi+\frac{\pi}{4}} = (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{2}}{2},$$

在 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ 处交角 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 的正切为

$$\tan \theta = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

于是 $\theta = \arctan 2\sqrt{2} \approx 70^\circ 30'$.

【1063】 为使曲线 $y = \arctan nx$ ($n > 0$) 和 Ox 轴的交角大于 89° , 应当如何选择参数 n ?

解 曲线 $y = \arctan nx$ 与 Ox 轴的交点不妨取 $(0, 0)$ 点, 故交角 θ 的正切为 $\tan \theta = y' \big|_{x=0} = \frac{n}{1 + (nx)^2} \bigg|_{x=0} = n$

$\theta > 89^\circ$, 等价于 $\tan \theta > \tan 89^\circ = 57.29$, 即 $n > 57.29$.

【1063. 1】 证明: 曲线 $y = |x|^\alpha$

(1) 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 与 Oy 轴相切;

(2) 当 $1 < \alpha < +\infty$ 时, 与 Ox 轴相切.

证 曲线 $y = |x|^\alpha$ 在坐标原点 $(0, 0)$ 与 Ox 轴及 Oy 轴相交.

(1) 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 在 $x = 0$ 处有

$$y'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{|\Delta x|^\alpha - 0}{\Delta x} = +\infty,$$

$$y'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|\Delta x|^\alpha - 0}{\Delta x} = -\infty.$$

故在 $(0, 0)$ 点曲线与 Oy 轴相切.

(2) 当 $1 < \alpha < +\infty$ 时在 $x = 0$ 处有

$$y' \big|_{x=0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|^\alpha - 0}{\Delta x} = 0.$$

故在 $(0,0)$ 点曲线与 Ox 轴相切.

【1063.2】 证明: 对于函数

$$y = \begin{cases} |x|^\alpha, & \text{若 } \alpha \neq 0, x \neq 0, \\ 1, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$$

的图形, 经过点 $A(0,1)$ 的割线的极限位置是 Oy 轴.

证 当 $\alpha > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha = 0$, 故当 $x \rightarrow 0$ 时经过 $A(0,1)$ 的割线的极限位置是通过 $A(0,1)$ 和 $O(0,0)$ 的直线, 即 Oy 轴. 当 $\alpha < 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha = \infty$, 故当 $x \rightarrow 0$ 时经过 $A(0,1)$ 点的割线, 其斜率趋于 ∞ , 因此其极限位置为 Oy 轴.

【1064】 确定曲线

(1) $y = \sqrt{1 - e^{-a^2 x^2}}$ 在点 $x = 0$ 处;

(2) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ 在点 $x = 1$ 处.

左切线和右切线之间的夹角.

解 (1) 函数在 $x = 0$ 点的左、右导数分别为

$$\begin{aligned} y'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - e^{-a^2 x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[-\sqrt{\frac{e^{-a^2 x^2} - 1}{-a^2 x^2}} \cdot a^2 \right] = -|a|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - e^{-a^2 x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{e^{-a^2 x^2} - 1}{-a^2 x^2}} \cdot a^2 = |a|, \end{aligned}$$

所以在 $x = 0$ 处, 左、右切线的夹角 θ 满足

$$\tan \theta = \frac{2|a|}{a^2 - 1},$$

即 $\theta = 2 \arctan \frac{1}{|a|}.$

(2) 函数在 $x = 1$ 处的左、右导数分别为

$$\begin{aligned}
 y'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \arcsin 1}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-\arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{\frac{1-x^2}{1+x^2}}{1-x} = 1, \\
 y'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \arcsin 1}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\arcsin \frac{x^2-1}{1+x^2}}{x-1} = -1.
 \end{aligned}$$

因此左、右切线的斜率互为负倒数,故,左、右切线的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

【1065】 证明:对数螺线 $r = ae^{m\varphi}$ (a 和 m —常数) 的切线与切点向量径形成固定的角度.

证 设切线与切点的向径所成的角为 β , 由于

$$r = ae^{m\varphi}, r' = ma e^{m\varphi}.$$

所以 $\tan\beta = \frac{r}{r'} = \frac{1}{m}$ 为一常数,故 β 为一常量.

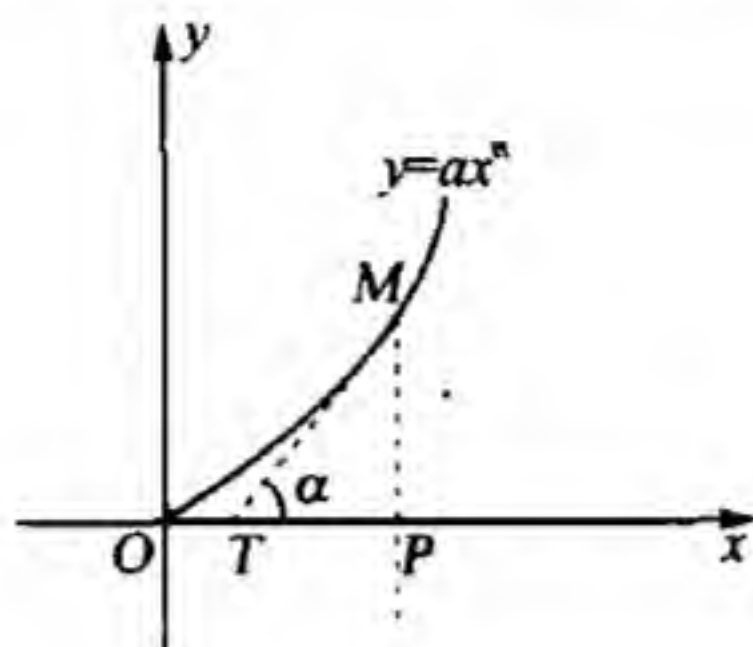
【1066】 确定曲线 $y = ax^n$ 的次切线长度,并由此给出作此曲线的切线的方法.

解 设在曲线上的任一点 $M(x, y)$ 的次切线长为 l_T , 如 1066 题图所示

$$l_T = |PT| = \left| \frac{y}{\tan\alpha} \right| = \left| \frac{y}{y'} \right| = \left| \frac{ax^n}{nax^{n-1}} \right| = \left| \frac{x}{n} \right|.$$

因此,我们可以按如下的方法作该曲线在点 $M(x, y)$ 的切线:对于曲线上任一点 $M(x, y)$,过此点作垂直于 Ox 轴的直线,垂足为 P .

若在 P 点有 $yy' > 0$,则在 P 点的左侧取点 T ,使 $|PT| =$



1066 题图

$\frac{|x|}{n}$; 反之, 则 P 点的右侧取点 T ,

使 $|PT| = \frac{|x|}{n}$. 然后联接 MT , 则 MT 就是所求的切线.

【1067】 证明: 抛物线 $y^2 = 2px$ 的

- (1) 次切线长等于切点横坐标的两倍;
- (2) 次法线为一常量.

给出作抛物线切线的方法.

证 (1) 因为 $2yy' = 2p$ 次切线长为

$$\begin{aligned} l_T = |PT| &= \left| \frac{y}{y'} \right| = \left| \frac{y}{\frac{p}{y}} \right| = \left| \frac{y^2}{p} \right| \\ &= \left| \frac{2px}{p} \right| = 2|x|. \end{aligned}$$

所以次切线长为切点横坐标的两倍.

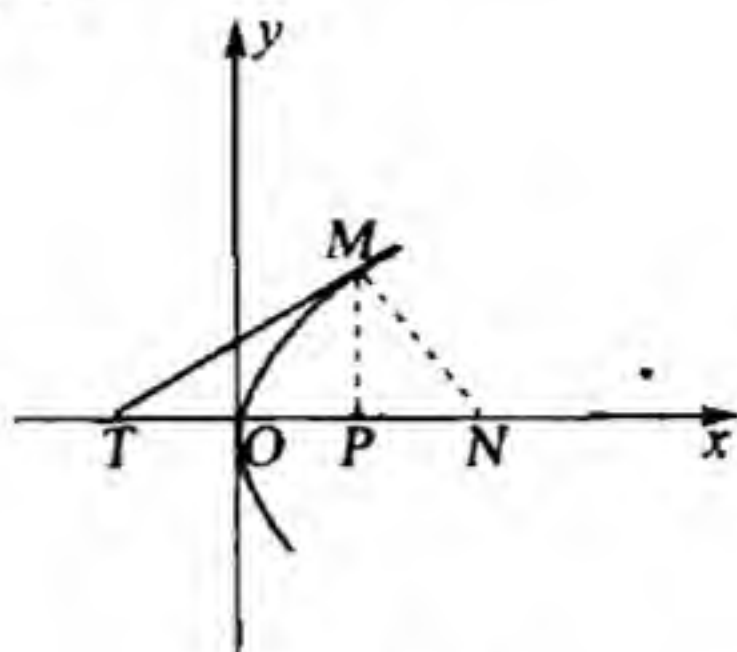
(2) 次法线长为

$$l_N = |PN| = |yy'| = \left| y \cdot \frac{p}{y} \right| = p.$$

所以, 次法线长为一常量.

因此, 可按下面的方法作抛物线的切线: 由曲线 $y^2 = 2px$ 上的任一点 $M(x, y)$ 作垂直于 Ox 轴的垂线, 垂足为 P , 由 $yy' = p$, 故当 $P > 0$ ($P < 0$) 时, 在 Ox 轴上 P 点的左(右)侧取点 T , 使 $|PT| = 2|x|$, 联结 TM , 直线 MT 即为所求切线.

如 1067 题图所示.



1067 题图

【1068】 证明:指数曲线 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的次切线为一常量,给出作指数曲线切线的方法.

证 次切线长为

$$l_T = |PT| = \left| \frac{y}{y'} \right| = \left| \frac{a^x}{a^x \ln a} \right| = \frac{1}{|\ln a|},$$

从而次切线的长为一常数.

按如下的方法作曲线的切线;对于曲线 $y = a^x$ ($a > 0$) 上的任一点 $M(x, y)$,过该点作直线垂直于 Ox 轴,设垂足为 P .当 $a > 1$ 时, $yy' > 0$,故在 Ox 轴上 P 点的左侧取点 T ,使

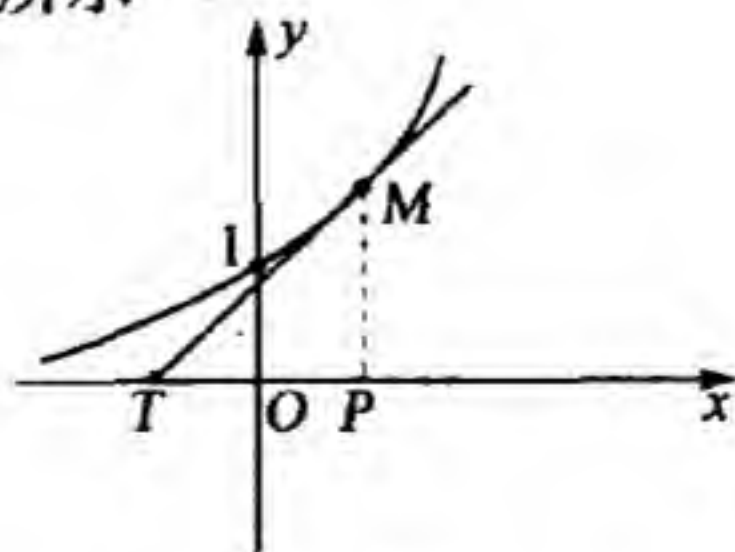
$$|PT| = \frac{1}{\ln a}.$$

当 $a < 1$ 时, $yy' < 0$,故在 Ox 轴上 P 点的右侧取点 T ,使

$$|PT| = \frac{1}{|\ln a|},$$

连接 MT ,即为所求直线.

如图 1068 题图所示



1068 题图 1

【1069】 确定悬链线 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ 在任一点 $M(x_0, y_0)$ 的法线长.

解 法线长为 $|MN| = |y| \sqrt{1+y'^2} |_{(x_0, y_0)}$,

又 $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$,

所以 $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} = \left| \operatorname{ch} \frac{x}{a} \right| = \left| \frac{y}{a} \right|$.

故 $|MN| = |y_0| \cdot \left| \frac{y_0}{a} \right| = \frac{y_0^2}{|a|} \quad (a \neq 0)$.

【1070】 证明: 内摆线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$ 的介于坐标轴之间的切线段长度是一常量.

证 在方程 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 两边对 x 求导得

$$y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}},$$

故在曲线上任一点 $M_0(x_0, y_0) (x_0 \neq 0)$ 处的切线方程为

$$y - y_0 = -\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(x - x_0).$$

它在两坐标轴上的截距分别为

$$l_x = x_0 + \sqrt[3]{x_0 y_0^2}, l_y = y_0 + \sqrt[3]{x_0^2 y_0}.$$

于是, 切线在两坐标之间部分的长度为

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2},$$

而
$$\begin{aligned} l_x^2 + l_y^2 &= x_0^2 + y_0^2 + 3x_0 \sqrt[3]{x_0 y_0^2} + 3y_0 \sqrt[3]{x_0^2 y_0} \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 3 \sqrt[3]{x_0^2 y_0^2} (\sqrt[3]{x_0^2} + \sqrt[3]{y_0^2}) \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 3 \sqrt[3]{a^2 x_0^2 y_0^2} \\ &= (a^{\frac{2}{3}} - y_0^{\frac{2}{3}})^3 + y_0^2 + 3 \sqrt[3]{(ax_0 y_0)^2} \\ &= a^2 - 3a^{\frac{4}{3}} y_0^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} y_0^{\frac{4}{3}} + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2 - 3a^{\frac{2}{3}} y_0^{\frac{2}{3}} (a^{\frac{2}{3}} - y_0^{\frac{2}{3}}) + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2 - 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$= a^2.$$

故 $l = a$. 即内摆线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$ 的切线介于坐标轴之间的部分的长为常量 a .

【1071】 若抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 Ox 轴相切, 系数 a, b, c 之间是什么关系?

解 因为 $y' = 2ax + b$.

要抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 Ox 轴相切, 必须 $y' = 0$. 所以

$$2x + b = 0,$$

即
$$x = -\frac{b}{2a}.$$

另一方面, 切点的坐标需满足

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

即
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

因此
$$b^2 - 4ac = 0.$$

此即系数 a, b, c 满足的关系.

【1072】 在什么条件下, 立方抛物线 $y = x^3 + px + q$ 与 Ox 轴相切?

解 因为 $y' = 3x^2 + p$,

要使曲线与 Ox 轴相切, 切点的横坐标必须满足下列方程组

$$\begin{cases} 3x^2 + p = 0, & \text{①} \\ x^3 + px + q = 0, & \text{②} \end{cases}$$

由 ① 得 $x = \pm \sqrt{-\frac{p}{3}},$

代入 ② 得 $\pm \sqrt{-\frac{p}{3}} \left(-\frac{p}{3} + p \right) = -q,$

即
$$\left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 = 0.$$

当 p, q 满足上述条件时, 曲线与 Ox 轴相切.

【1073】 参数 a 为何值时, 抛物线 $y = ax^2$ 和曲线 $y = \ln x$ 相切?

解 设两曲线的切点为 (x, y) , 则有

$$\begin{cases} 2ax = \frac{1}{x}, & \text{①} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax^2 = \ln x, & \text{②} \end{cases}$$

由①得 $x^2 = \frac{1}{2a}$ ($a \neq 0$),

代入②得 $\ln x = \frac{1}{2}$,

即 $x = \sqrt{e}$.

因此 $a = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2e}$.

【1074】 证明: 曲线 $y = f(x)$ ($f(x) > 0$) 与 $y = f(x)\sin ax$ 在公共点彼此相切, 其中 $f(x)$ 为可微分函数.

证 设两曲线的公共点为 (x, y) , 则由方程组

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = f(x)\sin ax, \end{cases} \quad (f(x) > 0).$$

得 $\sin ax = 1$, 其中

$$x = \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{a} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

故两曲线的交点为 $\left[\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{a}, f\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{a}\right) \right]$, 而在交点处, 两曲

线切线的斜率分别为

$$k_1 = f' \left[\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{a} \right],$$

$$\begin{aligned} k_2 = f' \left[\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{a} \right] \sin \left(2k\pi + \frac{\pi}{2} \right) \\ + af \left[\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{a} \right] \cos \left(2k\pi + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= f' \left[\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{a} \right],$$

从而 $k_1 = k_2$,

因此,两曲线在公共点彼此相切.

【1075】 证明:双曲线族 $x^2 - y^2 = a$ 与 $xy = b$ 构成一正交网,亦即这两族的曲线成直角相交.

证 设双曲线 $x^2 - y^2 = a$ 与双曲线 $xy = b$ 相交于点 $M(x, y)$,则在此点曲线 $x^2 - y^2 = a$ 的切线的斜率 k_1 满足

$$2x - 2yk_1 = 0,$$

即 $k_1 = \frac{x}{y}.$

在同一点曲线 $xy = b$ 的切线的斜率 k_2 满足 $y + xk_2 = 0$,

所以 $k_2 = -\frac{y}{x}.$

因此 $k_1 \cdot k_2 = \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{y}{x}\right) = -1.$

即此两切线垂直. 即两双曲线在交点垂直,两曲线族成一正交网.

【1076】 证明:抛物线族 $y^2 = 4a(a-x)$ ($a > 0$) 与 $y^2 = 4b(b+x)$ ($b > 0$) 构成正交网.

证 设抛物线 $y^2 = 4a(a-x)$ 与抛物线 $y^2 = 4b(b+x)$ 相交于 $M(x, y)$ 点. 则在此点曲线 $y^2 = 4a(a-x)$ 的切线斜率 k_1 满足 $2yk_1 = -4a$,

所以 $k_1 = -\frac{2a}{y}.$

在同一点曲线 $y^2 = 4b(b+x)$ 的切线斜率 k_2 满足 $2yk_2 = 4b$,

所以 $k_2 = \frac{2b}{y}.$

因此 $k_1 k_2 = -\frac{4ab}{y^2},$

又点 $M(x, y)$ 位于两条双曲线上,故

$$4a(a-x) = 4b(b+x).$$

解之得 $x = a - b$.

所以 $y^2 = 4a[a - (a - b)] = 4ab$.

故 $k_1 k_2 = -\frac{4ab}{y^2} = -1$.

故两切线正交. 因此, 该两抛物线族构成正交网.

【1077】 写出曲线

$$x = 2t - t^2, y = 3t - t^3$$

在点(1) $t = 0$; (2) $t = 1$ 处的切线和法线的方程.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3}{2}(1 + t).$

(1) 当 $t = 0$ 时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2},$$

因此切线方程为 $y = \frac{3}{2}x$,

即 $3x - 2y = 0$.

法线方程为 $y = -\frac{2}{3}x$,

即 $2x + 3y = 0$.

(2) 当 $t = 1$ 时,

$$x = 1, y = 2, \frac{dy}{dx} = 3,$$

故切线方程为 $y - 2 = 3(x - 1)$,

即 $3x - y - 1 = 0$.

法线方程为 $y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1)$,

即 $x + 3y - 7 = 0$.

【1078】 写出曲线 $x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}$ 在各点(1) $t = 0$;

(2) $t = 1$; (3) $t = \infty$ 处的切线和法线方程.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{(2 - 2t)(1 + t^3) - (2t - t^2)3t^2}{(1 + t^3)^2} \cdot \frac{(2 + 2t)(1 + t^3) - (2t + t^2)3t^2}{(1 + t^3)^2}$

$$= \frac{2-2t-4t^3+t^4}{2+2t-4t^3-t^4}.$$

(1) 当 $t=0$ 时,

$$x=0, y=0, \frac{dy}{dx}=1,$$

切线方程为 $y=x$.

法线方程为 $y=-x$.

(2) 当 $t=1$ 时,

$$x=\frac{3}{2}, y=\frac{1}{2}, \frac{dy}{dx}=3,$$

$$\text{切线方程为 } y-\frac{1}{2}=3\left(x-\frac{3}{2}\right),$$

$$\text{即 } 3x-y-4=0.$$

$$\text{法线方程为 } y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right),$$

$$\text{即 } x+3y-3=0.$$

(3) 当 $t=\infty$ 时,

$$x=0, y=0, \frac{dy}{dx}=-1,$$

(注意:此时是考虑 $t \rightarrow \infty$ 时的极限,即当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, \frac{dy}{dx} \rightarrow -1$).

切线方程为 $y=-x$,

法线方程为 $y=x$.

【1079】 写出摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 在任意点 $t=t_0$ 处的切线方程. 给出作摆线的切线的方法.

解 因为

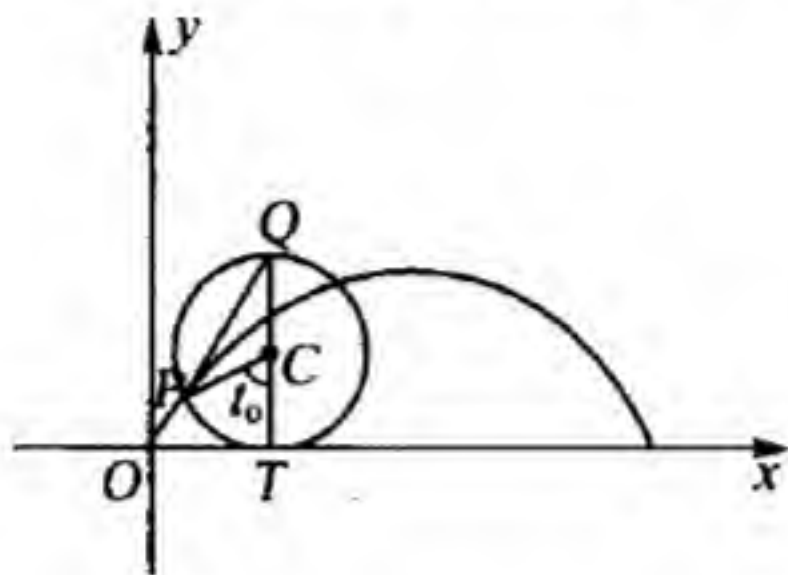
$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=t_0} = \frac{a \sin t}{a - a \cos t} \Big|_{t=t_0} = \cot \frac{t}{2} \Big|_{t=t_0} = \cot \frac{t_0}{2},$$

于是,切线方程为

$$y-a(1-\cos t_0) = \cot \frac{t_0}{2} [x-a(t_0-\sin t_0)],$$

化简得 $y - 2a = (x - at_0) \cot \frac{t_0}{2}$.

由此可知, 切线通过点 $(at_0, 2a)$, 如 1079 题图所示



1079 题图

$$\angle PCT = t_0,$$

而 $OT = TP = at_0, TQ = 2a,$

故 Q 的坐标为 $(at_0, 2a)$, 它在切线上.

于是摆线在 P 点的切线可如此来作, 过滚动圆与极轴 (Ox 轴) 的接触点 T , 作直线垂直于极轴 (Ox 轴), 它与滚动圆相交于另一点 Q , 联结 PQ . 此即所求切线.

【1080】 证明: 曳物线

$$x = a \left(\ln \tan \frac{t}{2} + \cos t \right),$$

$$y = a \sin t \quad (a > 0, 0 < t < \pi)$$

具有定长的切线段.

证 切线的长 $= \left| \frac{y}{y'_x} \right| \sqrt{1 + y'^2_x},$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{a \cos t}{a \left[\frac{1}{\tan \frac{t}{2} \cdot \cos^2 \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \sin t \right]} \\ &= \frac{\cos t}{\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t \right)} = \frac{\sin t}{\cos t}. \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \left| \frac{y}{y'_x} \right| \sqrt{1 + (y'_x)^2} = \left| \frac{a \sin t}{\frac{\sin t}{\cos t}} \right| \sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}$$

$$= |a| |\cos t| \cdot \frac{1}{|\cos t|}$$

$$= |a|.$$

即曳物线有一定长为 $|a|$ 的切线段.

写出下列曲线在指定点的切线和法线方程(1081 ~ 1082).

【1081】 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, M(6, 6.4).$

解 因为

$$y' = -\frac{64x}{100y} = -\frac{16x}{25y},$$

从而在 M 点的导数为

$$y' \Big|_{\substack{x=6 \\ y=6.4}} = -\frac{16 \times 6}{25 \times 6.4} = -\frac{3}{5}.$$

所以在 M 点的切线方程为 $y - 6.4 = -\frac{3}{5}(x - 6)$,

即 $3x + 5y - 50 = 0.$

法线方程为 $y - 6.4 = \frac{5}{3}(x - 6),$

即 $5x - 3y - 10.8 = 0.$

【1082】 $xy + \ln y = 1, M(1, 1).$

解 方程 $xy + \ln y = 1$ 两边对 x 求导得

$$y + xy'_x + \frac{1}{y}y'_x = 0.$$

从而 $y'_x = -\frac{y^2}{1 + xy}, y'_x \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -\frac{1}{2}.$

故切线方程为 $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1),$

即 $x + 2y - 3 = 0.$

法线方程为 $y - 1 = 2(x - 1),$

即 $2x - y - 1 = 0.$

§ 4. 函数的微分

1. 函数的微分 如果自变量为 x 的函数 $y = f(x)$ 的增量可用以下形式表示:

$$\Delta y = A(x)dx + o(dx), dx = \Delta x$$

则此增量的线性部分称作函数 y 的微分: $dy = A(x)dx$.

函数 $y = f(x)$ 的微分存在的充要条件是存在有穷导数 $y' = f'(x)$, 且有 $dy = y'dx$. ①

如果自变量 x 是另一新的自变量的函数, 公式 ① 在这种情况下仍然有效(一阶微分形式的不变性).

2. 函数微小增量的估计 为计算可微分函数 $f(x)$ 的微小增量可利用下式

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

如果 $f'(x) \neq 0$, 当 $|\Delta x|$ 足够小时, 其相对误差可任意地小.

特别是, 如果自变量的绝对误差等于 $|\Delta x|$, 则函数 $y = f(x)$ 的绝对误差 $|\Delta y|$ 和相对误差 δ_y 用下列公式近似地表示:

$$\Delta y = |y'\Delta x|,$$

及
$$\delta_y = \left| \frac{y'}{y} \Delta x \right|.$$

【1083】 设

$$(1) \Delta x = 1; (2) \Delta x = 0.1; (3) \Delta x = 0.01.$$

对于函数

$$f(x) = x^3 - 2x + 1,$$

求出(1) $\Delta f(1)$; (2) $df(1)$, 并进行比较.

$$\begin{aligned} \text{解 } \Delta f(1) &= f(1 + \Delta x) - f(1) \\ &= (1 + \Delta x)^3 - 2(1 + \Delta x) + 1 - (1 - 2 + 1) \\ &= \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3, \end{aligned}$$

$$df(1) = f'(1)\Delta x = (3x^2 - 2)|_{x=1}\Delta x = \Delta x.$$

将所求值列表比较如下

	$\Delta f(1)$	$df(1)$
Δx	$\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$	Δx
(1) $\Delta x = 1$	5	1
(2) $\Delta x = 0.1$	0.131	0.1
(3) $\Delta x = 0.01$	0.010301	0.01

从上表可看出,当 Δx 愈小, $\Delta f(1)$ 与 $df(1)$ 之差愈小.

【1084】 运动方程用下式表示

$$x = 5t^2,$$

其中 t 以秒计, x 以米计.

若(1) $\Delta t = 1$ 秒(2) $\Delta t = 0.1$ 秒(3) $\Delta t = 0.001$ 秒,当 $t = 2$ 秒时,求出路程的增量 Δx 及路程的微分 dx , 并进行比较.

$$\begin{aligned}\text{解 } \Delta x &= 5(2 + \Delta t)^2 - 5 \cdot 2^2 \\ &= 20\Delta t + 5(\Delta t)^2,\end{aligned}$$

$$dx = x' \big|_{t=2} \Delta t = 10t \big|_{t=2} \Delta t = 20\Delta t.$$

(1) 当 $\Delta t = 1$ 秒时,

$$\Delta x = 25 \text{ 米}, dx = 20 \text{ 米}.$$

(2) 当 $\Delta t = 0.1$ 秒时,

$$\Delta x = 2.05 \text{ 米}, dx = 2 \text{ 米}.$$

(3) 当 $\Delta t = 0.001$ 秒时

$$\Delta x = 0.020005 \text{ 米}, dx = 0.02 \text{ 米}.$$

由上可见,当 Δt 愈小, $|\Delta x - dx|$ 就愈小.

求下列函数 y 的微分(1085 ~ 1089).

【1085】 $y = \frac{1}{x}.$

解 $dy = y' dx = -\frac{1}{x^2} dx \quad (x \neq 0).$

【1086】 $y = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \quad (a \neq 0).$

解 $y' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2 + x^2},$

$$dy = \frac{1}{a^2 + x^2} dx.$$

【1087】 $y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|.$

解 $y' = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = \frac{1}{x^2 - a^2},$

$$dy = \frac{1}{x^2 - a^2} dx \quad (x \neq \pm a).$$

【1088】 $y = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|.$

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}, dy = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$

【1089】 $y = \arcsin \frac{x}{a} \quad (a \neq 0).$

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a}$

$$= \frac{|a|}{a \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$dy = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (|x| < |a|).$$

【1090】 求下列微分:

(1) $d(xe^x);$

(2) $d(\sin x - x \cos x);$

(3) $d\left(\frac{1}{x^3}\right);$

(4) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right);$

(5) $d(\sqrt{a^2 + x^2});$

(6) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right);$

(7) $d \ln(1-x^2);$

(8) $d\left(\arccos \frac{1}{|x|}\right);$

(9) $d\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \right].$

解 (1) $d(xe^x) = (xe^x)' dx = e^x(x+1)dx.$

(2) $d(\sin x - x \cos x) = (\sin x - x \cos x)' dx = x \sin x dx.$

(3) $d\left(\frac{1}{x^3}\right) = -\frac{3}{x^4} dx \quad (x \neq 0).$

(4) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' dx = \frac{\frac{1}{x} \sqrt{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x}{x} dx$
 $= \frac{2 - \ln x}{2x^{\frac{3}{2}}} dx \quad (x > 0).$

(5) $d(\sqrt{a^2 + x^2}) = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$

(6) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} dx$
 $= \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (|x| < 1).$

(7) $d(\ln(1-x^2)) = -\frac{2x}{1-x^2} dx \quad (|x| < 1).$

(8) $d\left(\arccos \frac{1}{|x|}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{|x|}{x} dx$
 $= \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1).$

(9) $d\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$
 $= \left[\frac{\cos^3 x + 2\sin^2 x \cos x}{2\cos^4 x} + \frac{1}{2\cos x}\right] dx$
 $= \frac{dx}{\cos^3 x} \quad \left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right).$

设 u, v, w 为 x 的可微函数, 求出函数 y 的微分 (1091 ~ 1095).

【1091】 $y = uvw.$

解 $dy = vw du + uv dv + uw dw.$

【1092】 $y = \frac{u}{v^2}.$

解 $dy = \frac{v^2 du - 2uv dv}{v^4} = \frac{v du - 2u dv}{v^3} \quad (v \neq 0).$

【1093】 $y = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$

解 $dy = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} (2u du + 2v dv)$
 $= -\frac{u du + v dv}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (u^2 + v^2 \neq 0).$

【1094】 $y = \arctan \frac{u}{v}.$

解 $dy = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}} \cdot \frac{v du - u dv}{v^2} = \frac{v du - u dv}{u^2 + v^2} \quad (v \neq 0).$

【1095】 $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}.$

解 $dy = \frac{2u du + 2v dv}{2(u^2 + v^2)} = \frac{u du + v dv}{u^2 + v^2} \quad (u^2 + v^2 \neq 0).$

【1096】 求下列微分:

(1) $\frac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9);$ (2) $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right);$

(3) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)};$ (4) $\frac{d(\tan x)}{d(\cot x)};$

(5) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}.$

解 (1) $\frac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9)$
 $= \frac{d}{d(x^3)}[x^3 - 2(x^3)^2 - (x^3)^3]$
 $= 1 - 4x^3 - 3x^6.$

(2) 由 $\frac{\sin x}{x}$ 为偶函数, 故不妨设 $x > 0$, 则

$$\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{d}{d(x^2)}\left[\frac{\sin \sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}}\right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{2} \cos \sqrt{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x^2}} \cdot \sin \sqrt{x^2}}{x^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2x} \sin x}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{2x^3}.
 \end{aligned}$$

显然, 上式对 $x < 0$ 时也是正确的. 故

$$\frac{d}{d(x^2)} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{x \cos x - \sin x}{2x^3} \quad (x \neq 0).$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} &= \frac{\cos x dx}{-\sin x dx} = -\cot x \\
 &\quad (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \frac{d(\tan x)}{d(\cot x)} &= \frac{\sec^2 x dx}{-\csc^2 x dx} = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = -\tan^2 x \\
 &\quad \left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right).
 \end{aligned}$$

$$(5) \quad \frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} = -1 \quad (|x| < 1).$$

【1097】 设扇形的半径 $R = 100$ 厘米, 圆心角 $\alpha = 60^\circ$, 如果
(1) 其半径 R 增加 1 厘米; (2) 圆心角 α 减小 $30'$, 问这个扇形的面积变化是多少? 给出精确解和近似解.

解 扇形面积 $S = \frac{1}{2} R^2 \alpha$.

(1) 当 α 固定, R 变化时,

$$\begin{aligned}
 \Delta S &= \frac{\alpha}{2} [(R + \Delta R)^2 - R^2] \\
 &= \alpha R \Delta R + \frac{1}{2} \alpha (\Delta R)^2,
 \end{aligned}$$

$$dS = R \alpha dR.$$

所以当 $R = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\Delta R = 1$ 时,

$$\Delta S = \frac{\pi}{6}[200 + 1] = 105.19 \text{ 平方厘米},$$

$$dS = 100 \cdot \frac{\pi}{3} = 104.67 \text{ 平方厘米(增加)}.$$

(2) 当 R 固定, α 变化时.

$$\Delta S = \frac{1}{2}R^2\Delta\alpha, dS = \frac{1}{2}R^2d\alpha.$$

所以, 当 $R = 100, \alpha = \frac{\pi}{3}, \Delta\alpha = -\frac{\pi}{360}$ 时,

$$\Delta S = \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{360}\right) = -43.61 \text{ 平方厘米},$$

$$dS = \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{360}\right) = -43.61 \text{ 平方厘米(减少)}.$$

【1098】 单摆的振动周期(以秒计)的计算公式是:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中 l 为摆的长度(以厘米计), $g = 981$ 厘米/秒² 为重力加速度. 为使周期 T 增大 0.05 秒, 对摆的长度 $l = 20$ 厘米需作怎样改变?

解 周期 T 对摆长 l 的微分为

$$dT = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{l}} dl = \frac{\pi}{\sqrt{gl}} dl,$$

将 $dT = 0.05, g = 981, l = 20$ 代入上式得

$$dl = \frac{0.05 \times \sqrt{981 \times 20}}{\pi} \approx 2.23,$$

即摆长增加约 2.23 厘米.

用函数的微分代替函数的增量, 求下列各式的近似值(1099 ~ 1103).

【1099】 $\sqrt[3]{1.02}$.

解 设 $f(x) = \sqrt[3]{x}, x_0 = 1, \Delta x = 0.02$

则
$$f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Big|_{x=1} = \frac{1}{3},$$

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x \approx 0.0067,$$

于是 $\sqrt[3]{1.02} = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0)$
 $= 1 + 0.0067 = 1.0067,$

即 $\sqrt[3]{1.02} \approx 1.0067.$

【1100】 $\sin 29^\circ$.

解 设 $f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{6}, \Delta x = -\frac{\pi}{180}$

则 $\sin 29^\circ \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$
 $= \sin \frac{\pi}{6} + \left(\cos \frac{\pi}{6}\right)\left(-\frac{\pi}{180}\right)$
 $= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{180} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.4849.$

【1101】 $\cos 151^\circ$.

解 设 $f(x) = \cos x, x_0 = \frac{5\pi}{6},$

$$\Delta x = \frac{\pi}{180} \cos 151^\circ \approx \cos \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$= -0.8747.$$

【1102】 $\arctan 1.05$.

解 设 $f(x) = \arctan x, x_0 = 1, \Delta x = 0.05$

则 $\arctan 1.05 \approx \arctan 1 + \frac{1}{1+1^2} \times 0.05$
 $= 0.8104(\text{弧度}).$

【1103】 $\lg 11$.

解 设 $f(x) = \lg x, x_0 = 10, \Delta x = 1$

则 $\lg 11 \approx \lg 10 + \frac{1}{10 \ln 10} \cdot 1 = 1.0434.$

【1104】 证明近似公式: $\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a} \quad (a > 0),$

其中 $|x| \ll a$ (正数 A 和 B 之间的关系 $A \ll B$ 表示 A 与 B 相比较时, A 为高阶无穷小.)

请用此公式近似地计算:

(1) $\sqrt{5}$; (2) $\sqrt{34}$; (3) $\sqrt{120}$.

并同表中的数值比较.

证 设 $f(y) = \sqrt{y}$, $y_0 = a^2$, $\Delta y = x$

则 $\sqrt{y_0 + \Delta y} \approx \sqrt{y_0} + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}\Delta y$ (当 $|\Delta y| \ll \sqrt{y_0}$ 时),

即 $\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}$ (当 $|x| \ll a$ 时).

$$(1) \sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1} \approx 2 + \frac{1}{4} = 2.25,$$

查表得 $\sqrt{5} \approx 2.236$.

$$(2) \sqrt{34} = \sqrt{6^2 - 2} \approx 6 - \frac{2}{12} = 5.833,$$

查表得 $\sqrt{34} = 5.831$.

$$(3) \sqrt{120} = \sqrt{11^2 - 1} \approx 11 - \frac{1}{22} = 10.9545,$$

查表得 $\sqrt{120} = 10.954$.

【1104. 1】 证明公式:

$$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a} - r \quad (a > 0, x > 0),$$

其中 $0 < r < \frac{x^2}{8a^3}$.

证 由 1104 题我们有

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a},$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad r &= a + \frac{x}{2a} - \sqrt{a^2 + x} = \frac{\left(a + \frac{x}{2a}\right)^2 - (a^2 + x)}{a + \frac{x}{2a} + \sqrt{a^2 + x}} \\ &= \frac{x^2}{4a^2 \left(a + \frac{x}{2a} + \sqrt{a^2 + x}\right)}, \end{aligned}$$

当 $a > 0, x > 0$ 时, 显然有

$$0 < r < \frac{x^2}{4a^2(a + \sqrt{a^2})} = \frac{x^2}{8a^3}.$$

因此 $\sqrt{a^2+x} = a + \frac{x}{2a} - r \quad 0 < r < \frac{x^2}{8a^3}.$

【1105】 证明近似公式:

$$\sqrt[n]{a^n+x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (a > 0)$$

其中 $|x| \ll a$. 用此公式近似地计算:

$$(1) \sqrt[3]{9}; (2) \sqrt[4]{80}; (3) \sqrt[7]{100}; (4) \sqrt[10]{1000}.$$

证 设 $f(y) = \sqrt[n]{y}, y_0 = a^n, \Delta y = x$.

则 $\sqrt[n]{y_0 + \Delta y} \approx \sqrt[n]{y_0} + \frac{\Delta y}{n \sqrt[n]{y_0^{n-1}}} \quad (\text{当 } |\Delta y| \ll \sqrt[n]{y_0}).$

所以

$$\sqrt[n]{a^n+x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (\text{当 } |x| \ll a \text{ 时}).$$

$$(1) \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{2^3+1} \approx 2 + \frac{1}{3 \times 2^2} = 2.083.$$

$$(2) \sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{3^4-1} \approx 3 - \frac{1}{4 \times 3^3} = 2.9907.$$

$$(3) \sqrt[7]{100} = \sqrt[7]{2^7-28} \approx 2 - \frac{28}{7 \times 2^6} = 1.938.$$

$$(4) \sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10}-24} \approx 2 - \frac{24}{10 \times 2^9} = 1.9954.$$

【1106】 正方形的边长 $x = 2.4$ 米 ± 0.05 米, 由此来计算这个正方形面积的相对误差和绝对误差是多少?

解 正方形的面积

$$A = x^2,$$

则 $\frac{dA}{dx} = 2x.$

于是, 面积的绝对误差为

$$\Delta A = 2 \times 2.4 \cdot 0.05 = 0.24 \text{ 平方米},$$

相对误差为

$$dA = \left| \frac{2x}{x^2} \Delta x \right|_{\substack{x=2.4 \\ |\Delta x|=0.05}} = 2 \frac{0.05}{2.4} = 4.2\%,$$

【1107】 为了计算出球的体积精确到 1%，向测量球的半径 R 时允许发生的相对误差是多少？

解 球的体积公式为

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

从而 $dV = 4\pi R^2 dR$.

所以球体积的相对误差

$$\delta_V = \left| \frac{dV}{V} \right| = \left| \frac{4\pi R^2 dR}{\frac{4}{3}\pi R^3} \right| = 3 \left| \frac{dR}{R} \right| = 3\delta_R.$$

因此，半径 R 允许发生的相对误差为

$$\delta_R = \frac{1}{3}\delta_V \leq \frac{1}{3} \times 0.01 = 0.33\%.$$

【1108】 借助单摆的振动即利用公式 $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ (其中 l 为摆的长度, T 为摆振动的全周期) 来求重力加速度. 当测量 (1) 摆长 l ; (2) 周期 T 有的相对误差 δ 时对 g 值有怎样的影响？

$$\text{解 (1) } \delta_g = \left| \frac{dg}{g} \right| = \left| \frac{dl}{l} \right| = \delta_l,$$

即 g 的相对误差等于摆长的相对误差.

$$(2) \delta_g = \left| \frac{dg}{g} \right| = \left| \frac{-\frac{8\pi^2 l}{T^3} dT}{\frac{4\pi^2 l}{T^2}} \right| = 2 \left| \frac{dT}{T} \right| = 2\delta_T,$$

即 g 的相对误差是周期相对误差的 2 倍.

【1109】 求出数 $x(x > 0)$ 的常用对数的绝对误差, 设此数的相对误差等于 δ .

解 若 δ 很小, 我们有

$$\ln(1 + \delta) \approx \delta,$$

因而, 所求的绝对误差为

$$\begin{aligned} |\lg(x + \Delta x) - \lg x| &= \left| \lg\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \right| \\ &= |\lg(1 + \delta)| = \frac{1}{\ln 10} \ln(1 + \delta) \approx 0.434\delta. \end{aligned}$$

【1110】 证明:用正切对数表求出的角度比用十进制同样位数的正弦对数表求出的角度更精确.

证 正切对数函数的微分为

$$d(\lg \tan \varphi) = \frac{d\varphi}{\ln 10 \cdot \tan \varphi \cos^2 \varphi} = \frac{d\varphi}{\ln 10 \cdot \sin \varphi \cos \varphi},$$

$$\text{于是 } |d\varphi| = \ln 10 \cdot |\sin \varphi| \cdot |\cos \varphi| |d(\lg \tan \varphi)|, \quad (1)$$

而正弦对数函数的微分为

$$d(\lg \sin \varphi) = \frac{\cos \varphi d\varphi}{\ln 10 \cdot \sin \varphi}.$$

$$\text{于是 } |d\varphi| = \ln 10 \cdot |\sin \varphi| \cdot \left| \frac{1}{\cos \varphi} \right| |d(\lg \sin \varphi)|, \quad (2)$$

比较①、②两式的右端. 由于假设确定 $\lg \sin \varphi$ 与 $\lg \tan \varphi$ 时, 具有同样的误差. 而

$$\left| \frac{1}{\cos \varphi} \right| \geq 1 \geq |\cos \varphi|,$$

故①所确定的 $|d\varphi|$ 小于等于②式所确定的 $|d\varphi|$.

因此, 求角度时用正切对数表比用正弦对数表更精确.

§ 5. 高阶导数和微分

1. 基本定义 函数 $y = f(x)$ 的高阶导数由下述关系式依次确定(假设相应的运算均有意义)

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \quad (n = 2, 3, \dots).$$

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上有连续导数 $f^{(n)}(x)$, 则可记为:

$$f(x) \in C^{(n)}(a, b),$$

特别是, 如果 $f(x)$ 在 (a, b) 区间具有各阶连续导数, 则记为:

$$f(x) \in C^{(\infty)}(a, b),$$

函数 $y = f(x)$ 的高阶微分由以下公式依次确定:

$$d^n y = d(d^{n-1} y) \quad (n = 2, 3, \dots),$$

其中取 $d'y = dy = y'dx$.

如果 x 为自变量, 则有:

$$d^2 x = d^3 x = \dots = 0.$$

在这种情况下,以下公式成立:

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \text{ 及 } y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

2. 基本公式

$$(1) (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0); (e^x)^{(n)} = e^x.$$

$$(2) (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$(3) (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$(4) (x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}.$$

$$(5) (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

3. 莱布尼茨公式 如果函数 $u = \varphi(x)$ 和 $v = \psi(x)$ 有 n 阶导数(可微分 n 次),则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)},$$

其中 $u^{(0)} = u, v^{(0)} = v$ 且 C_n^i 为由 n 个元素每次取 i 个的组合数.

同样地,对微分 $d^n(uv)$ 有:

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^n C_n^i d^{n-i}u d^i v,$$

其中设 $d^0 u = u$ 且 $d^0 v = v$.

求出 y'' , 若(1111 ~ 1119).

【1111】 $y = x \sqrt{1+x^2}.$

解 $y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}},$

$$y'' = \left(\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} \right)'$$

$$= \frac{4x \sqrt{1+x^2} - (1+2x^2) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

【1112】 $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

解 $y' = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$

$$y'' = \left(-\frac{3}{2}\right)(-2x)(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (|x| < 1).$$

【1113】 $y = e^{-x^2}.$

解 $y' = -2xe^{-x^2},$

$$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

【1114】 $y = \tan x.$

解 $y' = \sec^2 x,$

$$y'' = 2\sec x \cdot \sec x \cdot \tan x = 2\sec^2 x \cdot \tan x$$

$$\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right).$$

【1115】 $y = (1+x^2)\arctan x.$

解 $y' = 2x\arctan x + (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2}$

$$= 2x\arctan x + 1,$$

$$y'' = 2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2}.$$

【1116】 $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$

解 $y' = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$

$$y'' = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\left(\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + 3x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \arcsin x}{(1-x^2)^3} \\
 & = \frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (|x| < 1).
 \end{aligned}$$

【1117】 $y = x \ln x$.

解 $y' = \ln x + 1$.

$$y'' = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

【1118】 $y = \ln f(x)$.

解 $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

$$y'' = \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} \quad (f(x) > 0).$$

【1119】 $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.

解 $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$

$$+ x[\cos(\ln x) - \sin(\ln x)] \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 2\cos(\ln x),$$

$$y'' = -\frac{2\sin(\ln x)}{x} \quad (x > 0).$$

【1120】 设 $y = e^{\sin x} \cos(\sin x)$, 求 $y(0)$, $y'(0)$ 和 $y''(0)$.

解 $y(0) = 1$,

$$\text{又 } y' = e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \cos(\sin x)$$

$$- e^{\sin x} \cos x \cdot \sin(\sin x)$$

$$= e^{\sin x} \cos x [\cos(\sin x) - \sin(\sin x)],$$

$$y'(0) = e^0 \cdot 1 \cdot [1 - 0] = 1,$$

$$y'' = e^{\sin x} [\cos^2 x \cdot \cos(\sin x) - \sin x \cos(\sin x)$$

$$- \cos^2 x \sin(\sin x) - \cos^2 x \sin(\sin x)$$

$$+ \sin x \sin(\sin x) - \cos^2 x \cos(\sin x)]$$

$$= e^{\sin x} \{-2\cos^2 x \sin(\sin x)$$

$$+ \sin x [\sin(\sin x) - \cos(\sin x)]\}.$$

于是 $y''(0) = e^0(0+0) = 0$.

设 $u = \varphi(x)$ 和 $v = \psi(x)$ 为二次可微的函数, 求 y'' , 设(1121 ~ 1124).

【1121】 $y = u^2$.

解 $y' = 2uu'$,

$$y'' = 2u'^2 + 2uu'' = 2(u'^2 + uu'').$$

【1122】 $y = \ln \frac{u}{v}$.

解 $y' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$,

$$y'' = \frac{uu'' - u'^2}{u^2} - \frac{vv'' - v'^2}{v^2} \quad (uv > 0).$$

【1123】 $y = \sqrt{u^2 + v^2}$.

解 $y' = \frac{uu' + vv'}{\sqrt{u^2 + v^2}}$,

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(uu'' + u'^2 + vv'' + v'^2) \sqrt{u^2 + v^2} - \frac{(uu' + vv')^2}{\sqrt{u^2 + v^2}}}{u^2 + v^2} \\ &= \frac{(u^2 + v^2)(uu'' + vv'') + (u'v - v'u)^2}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$(u^2 + v^2 > 0).$$

【1124】 $y = u^v \quad (u > 0)$.

解 $\ln y = v \ln u$,

所以 $y' = u^v \left[v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right],$

$$\begin{aligned} y'' &= u^v \left[v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right]^2 \\ &\quad + u^v \left[v'' \ln u + \frac{v'u'}{u} + \frac{(u'v' + uu'')u - uu'^2}{u^2} \right] \\ &= u^v \left[\left(v' \ln u + \frac{u'}{u} v \right)^2 + v'' \ln u + 2 \frac{u'v'}{u} + \frac{v}{u} u'' - \frac{v}{u^2} u'^2 \right]. \end{aligned}$$

设 $f(x)$ 三次为可微的函数, 求出 y'' 和 y''' , 设 (1125 ~ 1128).

【1125】 $y = f(x^2)$.

解 $y' = 2xf'(x^2),$
 $y'' = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2),$
 $y''' = 4xf''(x^2) + 8xf''(x^2) + 8x^3 f'''(x^2)$
 $= 12xf''(x^2) + 8x^3 f'''(x^2).$

【1126】 $y = f\left(\frac{1}{x}\right).$

解 $y' = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right),$
 $y'' = \frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right),$
 $y''' = -\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{4}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^6}f'''(\frac{1}{x})$
 $= -\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^6}f'''(\frac{1}{x})$
 $(x \neq 0).$

【1127】 $y = f(e^x).$

解 $y' = e^x f'(e^x),$
 $y'' = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x),$
 $y''' = e^x f'(e^x) + 3e^{2x} f''(e^x) + e^{3x} f'''(e^x).$

【1128】 $y = f(\ln x).$

解 $y' = \frac{1}{x}f'(\ln x),$
 $y'' = -\frac{1}{x^2}f'(\ln x) + \frac{1}{x^2}f''(\ln x)$
 $= \frac{1}{x^2}[f''(\ln x) - f'(\ln x)],$
 $y''' = -\frac{2}{x^3}[f''(\ln x) - f'(\ln x)] + \frac{1}{x^3}[f'''(\ln x) - f''(\ln x)]$
 $= \frac{1}{x^3}[f'''(\ln x) - 3f''(\ln x) + 2f'(\ln x)].$

【1129】 $y = f(\varphi(x)),$ 其中 $\varphi(x)$ 为可多次微分的函数.

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \varphi'(x)f'(\varphi(x)), \\ y'' &= \varphi''(x)f'(\varphi(x)) + [\varphi'(x)]^2 f''(\varphi(x)), \\ y''' &= \varphi'''(x)f'(\varphi(x)) + 3\varphi'(x)\varphi''(x)f''(\varphi(x)) \\ &\quad + [\varphi'(x)]^3 f'''(\varphi(x)).\end{aligned}$$

【1130】 在以下二种情况下:

(1) x 为自变量;

(2) x 为中间变量,

求出函数 $y = e^x$ 的 $d^2 y$.

$$\text{解 } (1) dy = e^x dx, d^2 y = e^x dx^2.$$

$$(2) dy = e^x dx, d^2 y = e^x d^2 x + e^x dx^2.$$

设 x 为自变量, 求 $d^2 y$, 设(1131 ~ 1133).

$$\text{【1131】 } y = \sqrt{1+x^2}.$$

$$\text{解 } dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx,$$

$$d^2 y = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)' dx^2 = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx^2.$$

$$\text{【1132】 } y = \frac{\ln x}{x}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x), y'' = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

$$\text{所以 } d^2 y = \frac{2\ln x - 3}{x^3} dx^2 \quad (x > 0).$$

$$\text{【1133】 } y = x^x.$$

$$\text{解 } y' = x^x(1 + \ln x).$$

$$y'' = x^x \left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right].$$

$$\text{所以 } d^2 y = x^x \left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right] dx^2.$$

设 u 与 v 都为变量 x 的二次可微的函数, 求 $d^2 y$, 设(1134 ~ 1139).

$$\text{【1134】 } y = uv;$$

$$\text{解 } dy = u dv + v du,$$

$$\begin{aligned} d^2y &= du \cdot dv + ud^2v + dv \cdot du + vd^2u \\ &= ud^2v + 2du \cdot dv + vd^2u. \end{aligned}$$

【1135】 $y = \frac{u}{v};$

解 $dy = \frac{vdu - u dv}{v^2},$

$$\begin{aligned} d^2y &= \frac{v^2(dv \cdot du + vd^2u - du \cdot dv - ud^2v) - 2vdv(vdu - u dv)}{v^4} \\ &= \frac{v(vd^2u - ud^2v) - 2dv(vdu - u dv)}{v^3} \quad (v \neq 0). \end{aligned}$$

【1136】 $y = u^m v^n$ (m 和 n 都是常数);

解 $dy = mu^{m-1}v^n du + nu^m v^{n-1} dv,$

$$\begin{aligned} d^2y &= m(m-1)u^{m-2}v^n (du)^2 + 2mnu^{m-1}v^{n-1} du dv \\ &\quad + nu^{m-1}v^n d^2u + mn u^{m-1}v^{n-1} dudv \\ &\quad + n(n-1)u^m v^{n-2} (dv)^2 + nu^m v^{n-1} d^2v \\ &= u^{m-2}v^{n-2} [m(m-1)v^2 (du)^2 + 2mn uv du \cdot dv \\ &\quad + n(n-1)u^2 (dv)^2 + muv^2 d^2u + nu^2 v d^2v]. \end{aligned}$$

【1137】 $y = a^u$ ($a > 0$);

解 $dy = a^u \ln a \cdot du,$

$$\begin{aligned} d^2y &= a^u \ln^2 a \cdot (du)^2 + a^u \ln a \cdot d^2u \\ &= a^u \ln a [\ln a \cdot (du)^2 + d^2u]. \end{aligned}$$

【1138】 $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2};$

解 $dy = \frac{udu + vdv}{u^2 + v^2},$

$$\begin{aligned} d^2y &= \frac{(u^2 + v^2)[(du)^2 + ud^2u + (dv)^2 + vd^2v] - 2(udu + vdv)^2}{(u^2 + v^2)^2} \\ &= \frac{(v^2 - u^2)(du)^2 - 4uv du \cdot dv + (u^2 - v^2)(dv)^2 + (u^2 + v^2)(ud^2u + vd^2v)}{(u^2 + v^2)^2} \\ &\quad (u^2 + v^2 > 0). \end{aligned}$$

【1139】 $y = \operatorname{arctan} \frac{u}{v}.$

解 $dy = \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{v}\right)^2} \cdot \frac{vdu - u dv}{v^2} = \frac{vdu - u dv}{u^2 + v^2},$

$$\begin{aligned}
 d^2y &= \frac{(u^2 + v^2)(vd^2u - ud^2v) - 2(udu + vdv)(vdu - udv)}{(u^2 + v^2)^2} \\
 &= \frac{(u^2 + v^2)(vd^2u - ud^2v) + 2uv[(dv)^2 - (du)^2] + 2(u^2 - v^2)dudv}{(u^2 + v^2)^2}.
 \end{aligned}$$

求以下用参数表示的函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ (1140 ~ 1144).

【1140】 $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3$.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3(1-t^2)}{2(1-t)} = \frac{3}{2}(1+t),$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2}}{2(1-t)} = \frac{3}{4(1-t)},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{dy''_{x^2}}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{4(1-t)^2}}{2(1-t)} = \frac{3}{8(1-t)^3} \quad (t \neq 1).$$

【1141】 $x = acost, y = asint$.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{acost}{-asint} = -cot t,$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-asint} = -\frac{1}{a\sin^3 t},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{3cost}{a\sin^4 t}}{-asint} = -\frac{3cost}{a^2\sin^5 t}$$

$$(t \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

【1142】 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{asint}{a(1 - \cos t)} = \cot \frac{t}{2},$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-\frac{1}{2\sin^2 \frac{t}{2}}}{a(1 - \cos t)} = -\frac{1}{4a\sin^4 \frac{t}{2}},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\frac{\cos \frac{t}{2}}{2a\sin^5 \frac{t}{2}}}{a(1 - \cos t)} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{4a^2 \sin^7 \frac{t}{2}}$$

$$(t \neq 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

【1143】 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + t)}{\cos(\frac{\pi}{4} + t)} = \tan(\frac{\pi}{4} + t),$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4} + t)}}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{1}{\sqrt{2}e^t \cos^3(\frac{\pi}{4} + t)},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t} \left[-\frac{1}{\cos^3(\frac{\pi}{4} + t)} + 3 \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + t)}{\cos^4(\frac{\pi}{4} + t)} \right]}{e^t(\cos t - \sin t)} \\ &= \frac{e^{-2t} \left[3\sin(\frac{\pi}{4} + t) - \cos(\frac{\pi}{4} + t) \right]}{2\cos^5(\frac{\pi}{4} + t)} \end{aligned}$$

$$(t \neq k\pi + \frac{\pi}{4}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

【1144】 $x = f'(t), y = tf'(t) - f(t)$.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t) + tf''(t) - f'(t)}{f''(t)} = t,$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{f''(t)},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^2}}{f''(t)} = -\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3} \quad (f''(t) \neq 0).$$

【1145】 假设函数 $y = f(x)$ 可微分若干次, 求出反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的导数 $x', x'', x''', x^{(4)}$ (假定这些导数都存在);

解 $x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{f'(x)},$

$$x'' = -\frac{1}{f'(x)^2} \cdot f''(x) \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{f''(x)}{f'(x)^3},$$

$$x''' = -\frac{f'''(x) \frac{dx}{dy} f'(x)^3 - 3f'(x)^2 \cdot f''(x) \cdot \frac{dx}{dy} \cdot f''(x)}{f'(x)^6}$$

$$= -\frac{f'''(x) \cdot \frac{1}{f'(x)} f'(x)^3 - 3f'(x)^2 \cdot f''(x)^2 \cdot \frac{1}{f'(x)}}{f'(x)^6}$$

$$= \frac{3f''(x)^2 - f'(x)f'''(x)}{f'(x)^5},$$

$$x^{(4)} = \frac{f'(x)^5 \left(6f'(x)f''(x) \cdot \frac{1}{f'(x)} - f'(x)f''(x) \cdot \frac{1}{f'(x)} - f'(x)f^{(4)}(x) \cdot \frac{1}{f'(x)} \right)}{f'(x)^{10}}$$

$$- 5f'(x)^4 f''(x) \cdot \frac{1}{f'(x)} (3f''(x)^2 - f'(x)f'''(x))$$

$$= \frac{10f'(x)f''(x)f'''(x) - 15f''(x)^2 - f'(x)^2 f^{(4)}(x)}{f'(x)^7}$$

($f'(x) \neq 0$).

求出由以下隐函数给出的函数 $y = y(x)$ 的 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}$.

【1146】 $x^2 + y^2 = 25$

在点 $M(3, 4)$ 上 y', y'' 和 y''' 等于多少?

解 $y' = -\frac{x}{y},$

$$y'' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{25}{y^3},$$

$$y''' = \frac{75 \cdot y'}{y^4} = -\frac{75x}{y^5},$$

在点 $M(3,4)$, 有

$$y' \Big|_{\substack{x=3 \\ y=4}} = -\frac{3}{4}, \quad y'' \Big|_{\substack{x=3 \\ y=4}} = -\frac{25}{64},$$

$$y''' \Big|_{\substack{x=3 \\ y=4}} = -\frac{75 \times 3}{4^5} = -\frac{225}{1024}.$$

【1147】 $y^2 = 2px.$

解 $y' = \frac{p}{y},$

$$y'' = -\frac{p}{y^2} \cdot y' = -\frac{p^2}{y^3},$$

$$y''' = \frac{3p^2}{y^4} \cdot y' = \frac{3p^3}{y^5} \quad (y \neq 0).$$

【1148】 $x^2 - xy + y^2 = 1$

解 方程两边对 x 求导数得

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0, \quad \text{①}$$

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}, \quad \text{②}$$

① 式两边再对 x 求导数得

$$2 - 2y' - xy'' + 2y'^2 + 2yy'' = 0, \quad \text{③}$$

将 ② 式代入 ③ 式得

$$y'' = \frac{6}{(x - 2y)^3}, \quad \text{④}$$

③ 式两边再对 x 求导数得

$$-3y'' - xy''' + 6y'y'' + 2yy''' = 0, \quad \text{⑤}$$

将 ② 式及 ④ 式代入 ⑤ 式, 得

$$y''' = \frac{54x}{(x - 2y)^5} \quad (x \neq 2y).$$

求出 y'_x 和 y''_x . 如果:

【1149】 $y^2 + 2\ln y = x^4$.

解 对 x 求导数得

$$2yy' + 2 \frac{y'}{y} = 4x^3, \quad \textcircled{1}$$

$$y' = \frac{2x^3 y}{1 + y^2},$$

① 式两边再对 x 求导数得

$$2y'^2 + 2yy'' + 2 \frac{y''}{y} - \frac{2y'^2}{y^2} = 12x^2.$$

所以
$$y'' = \frac{2x^2 y}{(1 + y^2)^3} [3(1 + y^2)^2 + 2x^4(1 - y^2)].$$

【1150】 $\sqrt{x^2 + y^2} = ae^{\arctan \frac{y}{x}} \quad (a > 0).$

解 取对数得

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln a + \arctan \frac{y}{x}.$$

上式两边对 x 求导数得

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2},$$

于是
$$y' = \frac{x + y}{x - y},$$

上式再对 x 求导数得

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(1 + y')(x - y) - (x + y)(1 - y')}{(x - y)^2} \\ &= \frac{2xy' - 2y}{(x - y)^2} = \frac{2x \frac{x + y}{x - y} - 2y}{(x - y)^2} \\ &= \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3} \quad (x \neq y, x \neq 0). \end{aligned}$$

【1151】 假设函数 $f(x)$ 在 $x \leq x_0$ 时有定义且可微分二次, 为了使函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \leq x_0, \\ a(x-x_0) + b(x-x_0) + c, & \text{若 } x > x_0, \end{cases}$$

是可微分二次的函数, 应该如何选择系数 a, b 和 c ?

解 按题设, 我们有

$$F(x_0+0) = F(x_0-0),$$

$$F'(x_0+0) = F'(x_0-0),$$

$$F''(x_0+0) = F''(x_0-0).$$

$$\begin{aligned} \text{而 } F(x_0+0) &= \lim_{x \rightarrow x_0+0} F(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0+0} (a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c) \\ &= c, \end{aligned}$$

$$F(x_0-0) = f(x_0).$$

$$\text{于是 } c = f(x_0),$$

$$\begin{aligned} \text{又 } F'(x_0+0) &= [2a(x-x_0) + b] \big|_{x=x_0} = b, \\ F'(x_0-0) &= f'(x_0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } b &= f'(x_0), \\ F''(x_0+0) &= 2a, F''(x_0-0) = f''(x_0). \end{aligned}$$

$$\text{从而 } a = \frac{1}{2} f''(x_0).$$

【1152】 某点作直线运动的规律是:

$$S = 10 + 20t - 5t^2,$$

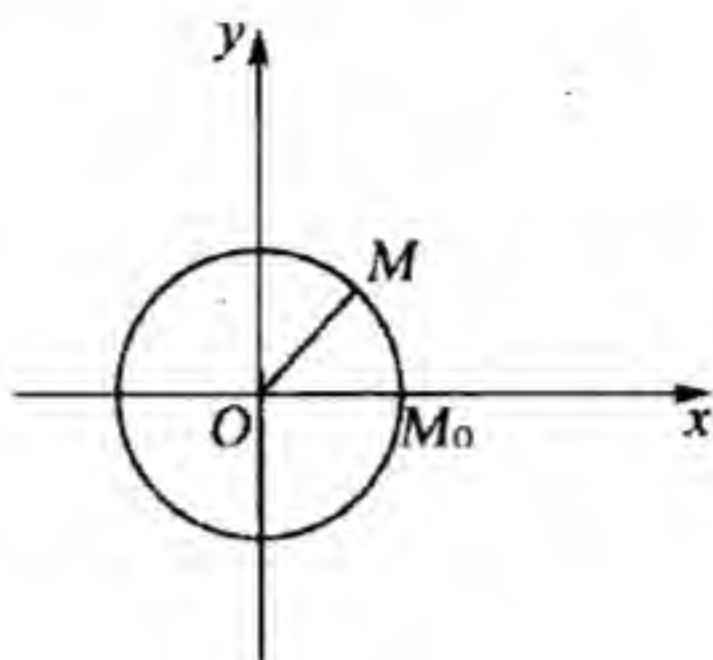
求该点运动速度和加速度. 当 $t = 2$ 时它的速度和加速度等于多少?

$$\text{解 速度 } v = \frac{ds}{dt} = 20 - 10t, v|_{t=2} = 0,$$

$$\text{加速度 } a = \frac{d^2s}{dt^2} = -10, a|_{t=2} = -10.$$

【1153】 点 $M(x, y)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 均匀地运动, 每 T 秒走完一圈. 求出点 M 在 Ox 轴上投影的速度 v 和加速度 j . 设 $t = 0$ 时点的位置在 $M_0(a, 0)$.

解 由于 $\angle M_0OM = \frac{2\pi}{T}t$, 从而 $x = a \cos \frac{2\pi}{T}t$,



1153 题图

于是速度为 $v = \frac{dx}{dt} = -\frac{2\pi a}{T} \sin \frac{2\pi}{T}t$,

加速度为 $j = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \cos \frac{2\pi}{T}t$.

【1154】 质点 $M(x, y)$ 在铅直平面 Oxy 内与水平面成 α 角的方向以初始速度 v_0 抛出, 建立(空气阻力略去不计)运动方程式并求速度 v 及加速度 j , 以及运动轨道. 问最大的高度和射程等于多少?

解 不考虑空气阻力, 运动方程为

$$x = v_0 t \cos \alpha, y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2,$$

化为直角坐标系为

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

所以, 轨道为一抛物线, 速度为

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - g t)^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2 v_0 g t \sin \alpha}, \end{aligned}$$

加速度为 $j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2}$

$$= \sqrt{0 + (-g)^2} = g,$$

$$\text{又} \quad \frac{dy}{dx} = \tan \alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

在最高处有 $\frac{dy}{dx} = 0$,

$$\text{即} \quad \tan \alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0,$$

$$\text{所以} \quad x = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g},$$

于是最大高度为

$$\begin{aligned} y_{\max} &= \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot \left(\frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right)^2 \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \end{aligned}$$

在最大射程处有 $y = 0$,

$$\text{即} \quad x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0.$$

$$\text{解得} \quad x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

从而最大射程为 $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

【1155】 点运动的方程为: $x = 4\sin \omega t - 3\cos \omega t$, $y = 3\sin \omega t + 4\cos \omega t$ (ω 是常数), 确定点的运动轨道, 速度和加速度值.

解 因为

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (4\sin \omega t - 3\cos \omega t)^2 + (3\sin \omega t + 4\cos \omega t)^2 \\ &= 25(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = 25. \end{aligned}$$

所以, 运动轨道是以原点为中心, 5 为半径的圆, 运动的速度, 加速度分别为

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{(4\omega \cos \omega t + 3\omega \sin \omega t)^2 + (3\omega \cos \omega t - 4\omega \sin \omega t)^2} \\ &= 5|\omega|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j &= \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{(-4\omega^2 \sin \omega t + 3\omega^2 \cos \omega t)^2 + (-3\omega^2 \sin \omega t - 4\omega^2 \cos \omega t)^2} \\
 &= 5\omega^2.
 \end{aligned}$$

求下列指定阶的导数(1156 ~ 1170).

【1156】 $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$, 求 $y^{(6)}$ 和 $y^{(7)}$.

解 $y = 4x^6 + a_5x^5 + \cdots + a_0$,

其中 a_0, a_1, \cdots, a_5 为常数, 所以

$$y^{(6)} = 4 \cdot 6! = 2880, y^{(7)} = 0.$$

【1157】 $y = \frac{a}{x^m}$, 求出 y''' .

解 $y' = -amx^{-m-1}$,

$$y'' = am(m+1)x^{-m-2},$$

$$y''' = -am(m+1)(m+2)x^{-m-3}$$

$$= -\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}} \quad (x \neq 0).$$

【1158】 $y = \sqrt{x}$, 求 $y^{(10)}$.

解 $y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$,

$$y^{(10)} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) \left(-\frac{7}{2}\right) \left(-\frac{9}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{11}{2}\right) \left(-\frac{13}{2}\right) \left(-\frac{15}{2}\right) \left(-\frac{17}{2}\right) x^{-\frac{19}{2}}$$

$$= -\frac{17!!!}{2^{10}x^9\sqrt{x}} \quad (x > 0),$$

其中 $17!!! = 1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 17$.

【1159】 $y = \frac{x^2}{1-x}$, 求 $y^{(8)}$.

解 $y = \frac{x^2-1+1}{1-x} = -(x+1) + \frac{1}{1-x}$,

$$y' = -1 + \frac{1}{(1-x)^2},$$

$$y'' = \frac{2}{(1-x)^3}, \dots,$$

$$y^{(8)} = \frac{8!}{(1-x)^9} \quad (x \neq 1).$$

【1160】 $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, 求 $y^{(100)}$.

解 $y = (1+x)(1-x)^{-\frac{1}{2}}$,

由莱布尼兹公式得

$$\begin{aligned} y^{(100)} &= \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k (1+x)^{(k)} [(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(100-k)} \\ &= (1+x) [(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(100)} + C_{100}^1 [(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(99)} \\ &= (1+x) \frac{199!!}{2^{100}} (1-x)^{-\frac{201}{2}} + 100 \cdot \frac{197!!}{2^{99}} (1-x)^{-\frac{199}{2}} \\ &= \frac{197!! \cdot (399-x)}{2^{100} (1-x)^{100} \sqrt{1-x}} \quad (x < 1). \end{aligned}$$

【1161】 $y = x^2 e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.

解 由莱布尼兹公式可得

$$\begin{aligned} y^{(20)} &= x^2 (e^{2x})^{(20)} + C_{20}^1 \cdot 2x \cdot (e^{2x})^{(19)} + C_{20}^2 \cdot 2 \cdot (e^{2x})^{(18)} \\ &= 2^{20} x^2 e^{2x} + 2^{20} \cdot 20 \cdot x \cdot e^{2x} + 10 \cdot 19 \cdot 2^{19} e^{2x} \\ &= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95). \end{aligned}$$

【1162】 $y = \frac{e^x}{x}$, 求 $y^{(10)}$.

解 $y^{(10)} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (e^x)^{(k)} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{(10-k)}$

$$= e^x \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \frac{10!}{(10-k)!} \frac{1}{x^{k+1}} \quad (x \neq 0).$$

【1163】 $y = x \ln x$, 求 $y^{(5)}$.

解 $y' = 1 + \ln x, y'' = \frac{1}{x},$

$$y^{(5)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(5)} = -\frac{3!}{x^4} \quad (x > 0).$$

【1164】 $y = \frac{\ln x}{x}$, 求 $y^{(5)}$.

解
$$\begin{aligned} y^{(5)} &= \sum_{k=0}^5 C_5^k (\ln x)^{(k)} \left(\frac{1}{x}\right)^{(5-k)} \\ &= -\frac{5!}{x^6} \ln x + 5 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{4!}{x^5} + 10 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(-\frac{3!}{x^4}\right) \\ &\quad + 10 \left(\frac{2!}{x^3}\right) \left(\frac{2!}{x^3}\right) + 5 \left(-\frac{3!}{x^4}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{4!}{x^5} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{274 - 120 \ln x}{x^6} \quad (x > 0). \end{aligned}$$

【1165】 $y = x^2 \sin 2x$, 求 $y^{(50)}$.

解
$$\begin{aligned} y^{(50)} &= \sum_{k=0}^{50} C_{50}^k (x^2)^{(k)} (\sin 2x)^{(50-k)} \\ &= x^2 (\sin 2x)^{(50)} + 50 \cdot 2x (\sin 2x)^{(49)} \\ &\quad + \frac{50 \cdot 49}{1 \cdot 2} \cdot 2 (\sin 2x)^{(48)} \\ &= 2^{50} x^2 \sin\left(2x + \frac{50}{2}\pi\right) + 100x \cdot 2^{49} \sin\left(2x + \frac{49}{2}\pi\right) \\ &\quad + \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 2^{48} \sin\left(2x + \frac{48}{2}\pi\right) \\ &= 2^{50} \left(-x^2 \sin 2x + 50x \cos 2x + \frac{1225}{2} \sin 2x\right). \end{aligned}$$

【1166】 $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$, 求 y''' .

解
$$\begin{aligned} y''' &= \cos 3x \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)^{(3)} + C_3^1 (\cos 3x)' \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)'' \\ &\quad + C_3^2 (\cos 3x)'' \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)' + (\cos 3x)''' \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} \\ &= -\frac{1}{3} \left(-\frac{4}{3}\right) \left(-\frac{7}{3}\right) (-3)^3 \cdot \frac{\cos 3x}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3(-3\sin 3x)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)(-3)^2 \\
& \cdot \frac{1}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}} + 3(-3^2\cos 3x)\left(-\frac{1}{3}\right) \\
& (-3)\frac{1}{(1-3x)^{\frac{4}{3}}} + 3^3\sin 3x \cdot \frac{1}{(1-3x)^{\frac{1}{3}}} \\
& = \frac{28-27(1-3x)^2}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}}\cos 3x + \frac{27(1-3x)^2-36}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}}\sin 3x \\
& \qquad \qquad \qquad \left(x \neq \frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

【1167】 $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$, 求 $y^{(10)}$.

解 利用三角函数积化和、差公式得

$$y = \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x,$$

$$\begin{aligned}
\text{于是 } y^{(10)} &= \frac{1}{4} \cdot 4^{10} \sin\left(4x + \frac{10}{2}\pi\right) - \frac{1}{4} \cdot 6^{10} \sin\left(6x + \frac{10}{2}\pi\right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \cdot 2^{10} \cdot \sin\left(2x + \frac{10}{2}\pi\right) \\
&= -4^9 \sin 4x + 2^8 \cdot 3^{10} \cdot \sin 6x - 2^8 \sin 2x.
\end{aligned}$$

【1168】 $y = x \operatorname{sh} x$, 求 $y^{(100)}$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } y^{(100)} &= x(\operatorname{sh} x)^{(100)} + C_{100}(\operatorname{sh} x)^{(99)} \\
&= x \operatorname{sh} x + 100 \operatorname{ch} x.
\end{aligned}$$

【1169】 $y = e^x \cos x$, 求 y^4 .

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= e^x (\cos x - \sin x), \\
y'' &= e^x (\cos x - \sin x) + e^x (-\sin x - \cos x) \\
&= -2e^x \sin x, \\
y''' &= -2e^x (\sin x + \cos x), \\
y^{(4)} &= -2e^x (\sin x + \cos x) - 2e^x (\cos x - \sin x) \\
&= -4e^x \cos x.
\end{aligned}$$

【1170】 $y = \sin^2 x \ln x$, 求出 $y^{(6)}$.

解 $y = \frac{1 - \cos 2x}{2} \ln x$

$$= \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cos 2x \cdot \ln x,$$

$$y^{(6)} = \frac{(-1)^5}{2} \frac{5!}{x^6} - \frac{1}{2} (\cos 2x \ln x)^{(6)}$$

$$= -\frac{60}{x^6} - \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^6 C_6^k (\cos 2x)^{(k)} (\ln x)^{(6-k)} \right]$$

$$= -\frac{60}{x^6} + \left(\frac{144}{x^5} - \frac{160}{x^3} + \frac{96}{x} \right) \sin 2x$$

$$+ \left(\frac{60}{x^6} - \frac{180}{x^4} + \frac{120}{x^2} + 32 \ln x \right) \cos 2x \quad (x > 0).$$

在以下各题中, 设 x 视为自变量, 求出指定阶的微分 (1171 ~ 1175).

【1171】 $y = x^5$, 求出 $d^5 y$.

解 $d^5 y = 5! dx^5 = 120 dx^5$.

【1172】 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 求出 $d^3 y$.

解 $y''' = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) x^{-\frac{7}{2}}$

$$= -\frac{15}{8x^3 \sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

所以 $d^3 y = -\frac{15}{8x^3 \sqrt{x}} dx^3 \quad (x > 0).$

【1173】 $y = x \cos 2x$, 求 $d^{10} y$.

解 $y^{(10)} = x(\cos 2x)^{(10)} + C_{10}^1 (\cos 2x)^{(9)}$

$$= 2^{10} x \cos \left(2x + \frac{10}{2} \pi \right)$$

$$+ 10 \cdot 2^9 \cos \left(2x + \frac{9}{2} \pi \right).$$

所以 $d^{10} y = -2^{10} (5 \sin 2x + x \cos 2x) dx^{10}.$

【1174】 $y = e^x \ln x$, 求 $d^4 y$.

$$\begin{aligned}\text{解 } y^{(4)} &= (e^x)^{(4)} \ln x + C_4^1 (e^x)^{(1)} (\ln x)' + C_4^2 (e^x)'' (\ln x)'' \\ &\quad + C_4^3 (e^x)' (\ln x)''' + e^x (\ln x)^{(4)} \\ &= e^x \left(\ln x + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{6}{x^4} \right).\end{aligned}$$

所以 $d^4 y = e^x \left(\ln x + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{6}{x^4} \right) dx^4.$

【1175】 $y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x$, 求出 $d^6 y$.

$$\begin{aligned}\text{解 } y^{(6)} &= \sum_{k=0}^6 C_6^k (\cos x)^{(k)} (\operatorname{ch} x)^{(6-k)} \\ &= \cos x \operatorname{ch} x + 6 \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{sh} x + 15 \cos \left(x + \frac{2}{2} \pi \right) \operatorname{ch} x \\ &\quad + 20 \cos \left(x + \frac{3}{2} \pi \right) \operatorname{sh} x + 15 \cos \left(x + \frac{4}{2} \pi \right) \operatorname{ch} x \\ &\quad + 6 \cos \left(x + \frac{5\pi}{2} \right) \operatorname{sh} x + \cos \left(x + \frac{6}{2} \pi \right) \operatorname{ch} x \\ &= 8 \sin x \operatorname{sh} x.\end{aligned}$$

所以 $d^6 y = 8 \sin x \operatorname{sh} x dx^6.$

如果 u 是 x 的可微分足够次的函数, 在以下各题中求出指定阶的微分(1176 ~ 1178).

【1176】 $y = u^2$, 求 $d^{10} y$.

$$\begin{aligned}\text{解 } d^{10} y &= d^{10} (u \cdot u) \\ &= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k d^k u \cdot d^{(10-k)} u \\ &= u d^{10} u + 10 du \cdot d^9 u + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} d^2 u \cdot d^8 u \\ &\quad + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 u d^7 u + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^4 u d^6 u \\ &\quad + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} (d^5 u)^2 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^6 u d^4 u \\ &\quad + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^7 u d^3 u + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} d^8 u d^2 u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 10d^9 u du + u d^{10} u \\
 &= 2u d^{10} u + 20dud^9 u + 90d^2 u d^8 u + 240d^3 u d^7 u \\
 &\quad + 420d^4 u d^6 u + 252(d^5 u)^2.
 \end{aligned}$$

【1177】 $y = e^u$, 求 $d^4 y$.

解 $dy = e^u du$,

$$d^2 y = e^u (du)^2 + e^u d^2 u,$$

$$d^3 y = e^u [(du)^3 + 3dud^2 u + d^3 u],$$

$$\begin{aligned}
 d^4 y &= e^u [(du)^4 + 3(du)^2 d^2 u + dud^3 u] \\
 &\quad + e^u [3(du)^2 d^2 u + 3(d^2 u)^2 + 3dud^3 u + d^4 u] \\
 &= e^u [(du)^4 + 6(du)^2 d^2 u + 3(d^2 u)^2 + 4dud^3 u \\
 &\quad + d^4 u].
 \end{aligned}$$

【1178】 $y = \ln u$, 求 $d^3 y$.

解 $dy = \frac{1}{u} du$,

$$d^2 y = -\frac{1}{u^2} (du)^2 + \frac{1}{u} d^2 u,$$

$$\begin{aligned}
 d^3 y &= \frac{2}{u^3} (du)^3 - \frac{2}{u^2} du \cdot d^2 u - \frac{1}{u^2} dud^2 u + \frac{1}{u} d^3 u \\
 &= \frac{2}{u^3} (du)^3 - \frac{3}{u^2} du \cdot d^2 u + \frac{1}{u} d^3 u.
 \end{aligned}$$

【1179】 由函数 $y = f(x)$ 求 $d^2 y$, $d^3 y$ 和 $d^4 y$ (假定 x 为某个自变数的函数).

解 $dy = f'(x) dx$,

$$d^2 y = f''(x) (dx)^2 + f'(x) d^2 x,$$

$$d^3 y = f'''(x) (dx)^3 + 3f'' dx \cdot d^2 x + f'(x) d^3 x,$$

$$\begin{aligned}
 d^4 y &= f^{(4)}(x) (dx)^4 + 6f'''(x) (dx)^2 d^2 x + 3f''(x) (d^2 x)^2 \\
 &\quad + 4f''(x) dx d^3 x + f'(x) d^4 x.
 \end{aligned}$$

【1180】 不假设 x 为自变量, 以变量 x 和 y 的逐次微分来表示函数 $y = f(x)$ 的导数 y'' 和 y''' .

解 $y' = \frac{dy}{dx},$

$$y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dx d^2 y - dy d^2 x}{(dx)^3} = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2 x & d^2 y \end{vmatrix}}{(dx)^3},$$

$$\begin{aligned} y''' &= \frac{d\left(\frac{dx d^2 y - dy d^2 x}{(dx)^3}\right)}{dx} \\ &= \frac{dx \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^3 x & d^3 y \end{vmatrix} - 3d^2 x \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2 x & d^2 y \end{vmatrix}}{(dx)^5}. \end{aligned}$$

【1181】 证明: 函数 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

满足方程式: $y'' + y = 0$, 其中 C_1 和 C_2 为任意常数.

证 $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x,$

$$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x = -y.$$

所以 $y'' + y = 0.$

【1182】 证明: 函数 $y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x$.

满足方程式: $y'' - y = 0$. 其中 C_1 和 C_2 为任意常数.

证 $y' = C_1 \operatorname{sh} x + C_2 \operatorname{ch} x,$

$$y'' = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x = y.$$

所以 $y'' - y = 0.$

【1183】 证明: 函数

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

满足方程 $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0$.

其中 C_1 和 C_2 为任意常数, λ_1 和 λ_2 为常数,

证 $y' = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x},$

$$y'' = C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x},$$

于是 $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y$

$$\begin{aligned} &= C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} - (\lambda_1 + \lambda_2)(C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \\ &\quad + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x}) + C_1 \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

【1184】 证明:函数

$$y = x^n [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)]$$

满足方程 $x^2 y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y = 0$.

其中 C_1 和 C_2 为任意常数, n 为常数,

证 $y' = nx^{n-1} [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)]$

$$+ x^{n-1} [-C_1 \sin(\ln x) + C_2 \cos(\ln x)],$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2} [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)]$$

$$+ (2n-1)x^{n-2} [-C_1 \sin(\ln x) + C_2 \cos(\ln x)]$$

$$+ x^{n-2} [-C_1 \cos(\ln x) - C_2 \sin(\ln x)]$$

$$= x^{n-2} \{ (n^2 - n - 1)[C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)]$$

$$+ (2n-1)[C_2 \cos(\ln x) - C_1 \sin(\ln x)] \},$$

于是

$$x^2 y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y$$

$$= x^n \{ (n^2 - n - 1)[C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)]$$

$$+ (2n-1)[C_2 \cos(\ln x) - C_1 \sin(\ln x)]$$

$$+ (1 - 2n)[n(C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x))]$$

$$+ [C_2 \cos(\ln x) - C_1 \sin(\ln x)]$$

$$+ (1 + n^2)[C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)] \}$$

$$= 0.$$

【1185】 证明:函数

$$y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$+ e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right),$$

满足方程 $y^{(4)} + y = 0$. 其中 C_1, C_2, C_3 和 C_4 都是任意常数.

$$\text{证 } y' = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(\frac{C_1}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_1}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$+ e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(-\frac{C_3}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right.$$

$$\left. - \frac{C_3}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_4}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\begin{aligned}
y'' &= e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(\frac{C_1}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_1}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{C_1}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_1}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_2}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\
&\quad + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(\frac{C_3}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_4}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_3}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{C_3}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_3}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\
&= e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_2 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - C_1 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\
&\quad + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(-C_4 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_3 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y^{(4)} &= (y'')'' \\
&= e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(-C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\
&\quad + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(-C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\
&= -y,
\end{aligned}$$

故 $y^{(4)} + y = 0$.

【1186】 证明: 如果函数 $f(x)$ 有 n 阶导数, 则

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

证 $[f(ax+b)]'_x = af'(ax+b),$

$$[f(ax+b)]'' = a^2 f''(ax+b),$$

...

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

【1187】 如果 $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$,

求出 $P^{(n)}(x)$.

解 $P'(x) = na_0 x^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + \cdots + a_1,$

$$P''(x) = n(n-1)a_0 x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1 x^{n-2} + \cdots + 2!a_2,$$

...

$$P^{(n)}(x) = n!a_0.$$

求 $y^{(n)}$, 设 (1188 ~ 1210).

【1188】 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

解 $y' = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2},$

$$y'' = -\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3},$$

$$y''' = \frac{(-3)(-2) \cdot c^2(ad-bc)}{(cx+d)^4} = \frac{3!c^2(ad-bc)}{(cx+d)^4},$$

...

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}n!c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}} \quad \left(x \neq -\frac{d}{c}, c \neq 0\right).$$

【1189】 $y = \frac{1}{x(1-x)}$

解 $y = \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x},$

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} \\ &= n! \left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \right] \quad (x \neq 0, x \neq 1). \end{aligned}$$

【1190】 $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$

提示: 将函数分解成最简单分数

解 $y = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)}$

$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1},$$

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}$$

$$= (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$$

$(x \neq 1, x \neq 2).$

【1191】 $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$

解 $y^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)$
 $\cdot (-2)^n(1-2x)^{-\frac{2n+1}{2}}$
 $= \frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}} \quad \left(x < \frac{1}{2}\right).$

【1192】 $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$

解 $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}} = \frac{x+1-1}{\sqrt[3]{1+x}}$
 $= (1+x)^{\frac{2}{3}} - (1+x)^{-\frac{1}{3}},$
 $y^{(n)} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\cdots\left(-\frac{3n-5}{3}\right)(1+x)^{-\frac{3n-2}{3}}$
 $- \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\cdots\left(-\frac{3n-2}{3}\right)(1+x)^{-\frac{3n+1}{3}}$
 $= \frac{(-1)^{n-1}1 \cdot 4 \cdots (3n-5)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}} [2(1+x) + (3n-2)]$
 $= \frac{(-1)^{n-1}1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-5)(2x+3n)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}$
 $(n \geq 2, x \neq -1).$

【1193】 $y = \sin^2 x.$

解 $y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x,$
 $y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = (\sin 2x)^{(n-1)}$
 $= 2^{n-1} \sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right).$

【1194】 $y = \cos^2 x$

解 $y' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x,$
 $y^{(n)} = -(\sin 2x)^{(n-1)} = -2^{n-1} \sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right).$

【1195】 $y = \sin^3 x.$

解 $y = \sin x \sin^2 x$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sin x (1 - \cos 2x) \\
&= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin x \cos 2x \\
&= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x,
\end{aligned}$$

故 $y^{(n)} = \frac{3}{4} \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) - \frac{3^n}{4} \sin\left(3x + \frac{n}{2}\pi\right).$

【1196】 $y = \cos^3 x.$

解 $y = \cos x \cdot \cos^2 x$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cos x (1 + \cos 2x) \\
&= \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x \cdot \cos 2x \\
&= \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x,
\end{aligned}$$

$$y^{(n)} = \frac{3}{4} \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) + \frac{3^n}{4} \cos\left(3x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

【1197】 $y = \sin ax \sin bx.$

解 $y = \frac{1}{2} \cos(a-b)x - \frac{1}{2} \cos(a+b)x,$

$$\begin{aligned}
y^{(n)} &= \frac{1}{2} (a-b)^n \cos\left[(a-b)x + \frac{n}{2}\pi\right] \\
&\quad - \frac{1}{2} (a+b)^n \cos\left[(a+b)x + \frac{n}{2}\pi\right].
\end{aligned}$$

【1198】 $y = \cos ax \cos bx.$

解 $y = \frac{1}{2} \cos(a-b)x + \frac{1}{2} \cos(a+b)x,$

$$\begin{aligned}
y^{(n)} &= \frac{1}{2} (a-b)^n \cos\left[(a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right] \\
&\quad + \frac{1}{2} (a+b)^n \cos\left[(a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right].
\end{aligned}$$

【1199】 $y = \sin ax \cos bx.$

解 $y = \frac{1}{2}\sin(a+b)x + \frac{1}{2}\sin(a-b)x,$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}(a+b)^n \sin\left[(a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right] \\ + \frac{1}{2}(a-b)^n \sin\left[(a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right].$$

【1200】 $y = \sin^2 ax \cos bx.$

解 $y = \frac{1}{2}\cos bx (1 - \cos 2ax)$

$$= \frac{1}{2}\cos bx - \frac{1}{4}\cos(2a+b)x - \frac{1}{4}\cos(2a-b)x,$$

所以 $y^{(n)} = \frac{1}{2}b^n \cos\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}(2a+b)^n \cos\left[(2a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right] \\ - \frac{1}{4}(2a-b)^n \cos\left[(2a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right].$

【1201】 $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$

解 $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x,$$

$$y^{(n)} = 4^{n-1} \cos\left(4x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

【1202】 $y = x \cos ax.$

解 $y^{(n)} = x(\cos ax)^{(n)} + C_n^1 (\cos ax)^{n-1}$

$$= a^n x \cos\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right) + na^{n-1} \cos\left(ax + \frac{n-1}{2}\pi\right).$$

【1203】 $y = x^2 \sin ax.$

解 $y^{(n)} = x^2 (\sin ax)^{(n)} + C_n^1 2x (\sin ax)^{(n-1)} + C_n^2 \cdot 2 (\sin ax)^{(n-2)}$

$$= a^n x^2 \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + 2na^{n-1} x \sin\left(ax + \frac{n-1}{2}\pi\right)$$

$$+ n(n-1)a^{n-2} \sin\left(ax + \frac{n-2}{2}\pi\right).$$

【1204】 $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

解 $y^{(n)} = (-1)^n (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$
 $+ (-1)^{n-1} n(2x + 2)e^{-x}$
 $+ (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2e^{-x}$
 $= (-1)^n e^{-x} [x^2 - 2(n-1)x + (n-1)(n-2)].$

【1205】 $y = \frac{e^x}{x}$.

解 $y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k e^x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}$
 $= e^x \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{x^{k+1}} \quad (x \neq 0).$

【1206】 $y = e^x \cos x$.

解 $y' = e^x (\cos x - \sin x) = 2^{\frac{1}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$
 $y'' = 2^{\frac{1}{2}} e^x \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$
 $= 2^{\frac{2}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{2\pi}{4}\right),$

由数学归纳法可证得 $y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$

【1207】 $y = e^x \sin x$.

解 $y' = e^x (\sin x + \cos x) = 2^{\frac{1}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$
 $y'' = 2^{\frac{1}{2}} e^x \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$
 $= 2^{\frac{2}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right),$

由数学归纳法可证得

$$y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

【1208】 $y = \ln \frac{a+bx}{a-bx}.$

解 $y' = \frac{b}{a+bx} + \frac{b}{a-bx},$

$$y^{(n)} = \left(\frac{b}{a+bx}\right)^{(n-1)} + \left(\frac{b}{a-bx}\right)^{(n-1)} \\ = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!b^n}{(a+bx)^n} + \frac{(n-1)!b^n}{(a-bx)^n}$$

$$\left(|x| < \left|\frac{a}{b}\right|\right).$$

【1209】 $y = e^{ax}P(x)$, 其中 $P(x)$ 为多项式.

解 $y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k P^{(k)}(x)(e^{ax})^{(n-k)} \\ = e^{ax}[a^n P(x) + C_n^1 a^{n-1} P'(x) + \cdots + P^{(n)}(x)].$

【1210】 $y = x \operatorname{sh} x.$

解 $y^{(n)} = x(\operatorname{sh} x)^{(n)} + n(\operatorname{sh} x)^{(n-1)} \\ = \frac{x}{2}[e^x - (-1)^n e^{-x}] + \frac{n}{2}[e^x - (-1)^{n-1} e^{-x}] \\ = \frac{1}{2}[(x+n)e^x - (-1)^n(x-n)e^{-x}].$

求 $d^n y$, 若 (1211 ~ 1212).

【1211】 $y = x^n e^x.$

解 $y^{(n)} = e^x \left[x^n + n^2 x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} + \cdots + n! \right].$

所以

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \\ = e^x \left[x^n + n^2 x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} + \cdots + n! \right] dx^n.$$

【1212】 $y = \frac{\ln x}{x}.$

解 $y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k (\ln x)^{(k)} \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)} \\ = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \ln x + n \cdot \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n} \cdot \frac{1}{x} \\ + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{(-1)^{n-2} (n-2)!}{x^{n-1}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$\begin{aligned}
 & + \cdots \frac{1}{x} \cdot \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \\
 & = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[\ln x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] \quad (x > 0).
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 d^n y &= y^{(n)} dx^n \\
 &= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[\ln x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] dx^n.
 \end{aligned}$$

【1213】 证明等式:

$$(1) [e^{ax} \sin(bx + c)]^{(n)} = e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \sin(bx + c + n\varphi),$$

$$(2) [e^{ax} \cos(bx + c)]^{(n)} = e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \cos(bx + c + n\varphi),$$

其中 $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

证 (1) $[e^{ax} \sin(bx + c)]'$

$$\begin{aligned}
 &= e^{ax} [a \sin(bx + c) + b \cos(bx + c)] \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2} e^{ax} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(bx + c) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(bx + c) \right] \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2} e^{ax} \sin(bx + c + \varphi),
 \end{aligned}$$

其中 $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$

$$\begin{aligned}
 [e^{ax} \sin(bx + c)]'' &= \sqrt{a^2 + b^2} [e^{ax} \sin(bx + c + \varphi)]' \\
 &= (a^2 + b^2)^{\frac{2}{2}} e^{ax} \sin(bx + c + 2\varphi),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [e^{ax} \sin(bx + c)]^{(n)} \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2} [e^{ax} \sin(bx + c + \varphi)]^{(n-1)} \\
 &= \cdots
 \end{aligned}$$

$$= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin(bx + c + n\varphi).$$

(2) 同理可证

$$[e^{ax} \cos(bx + c)]^{(n)} = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \cos(bx + c + n\varphi).$$

【1214】 求 $y^{(n)}$, 若:

(1) $y = \operatorname{ch} ax \cos bx;$

(2) $y = \operatorname{ch} ax \sin bx.$

解 (1) $y = \frac{1}{2}e^{ax} \cos bx + \frac{1}{2}e^{-ax} \cos bx,$

由 1213 题(2) 的结果知

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} [e^{ax} \cos(bx + n\varphi) \\ &\quad + e^{-ax} \cos(bx + n(\pi - \varphi))] \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left\{ e^{ax} \left[\cos\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \cdot \cos\left(n\varphi - \frac{n\pi}{2}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \cdot \sin\left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + e^{-ax} \left[\cos\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \cos\left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \sin\left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi\right) \right] \right\} \\ &= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left[\cos\left(n\varphi - \frac{n\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{ch} ax \cdot \cos\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \right. \\ &\quad \left. - \sin\left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi\right) \cdot \operatorname{sh} ax \cdot \sin\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \right]. \end{aligned}$$

$$(2) y = \frac{1}{2}e^{ax} \sin bx - \frac{1}{2}e^{-ax} \sin bx,$$

利用 1213 题(1) 的结果得

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} [e^{ax} \sin(bx + n\varphi) - e^{-ax} \sin(bx + n(\pi - \varphi))] \\ &= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left[\cos\left(n\varphi - \frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{ch} ax \cdot \sin\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi\right) \operatorname{sh} ax \cdot \cos\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \right], \end{aligned}$$

其中 $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

【1215】 将函数 $f(x) = \sin^{2p} x$ (其中 p —自然数) 变换为三角多项式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^p A_k \cos 2kx,$$

以求 $f^{(n)}(x).$

提示:假设 $\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t})$,

其中 $t = \cos x + i \sin x$ 且 $\bar{t} = \cos x - i \sin x, t\bar{t} = 1$
并利用莫伊弗尔公式.

解 设 $t = \cos x + i \sin x$,

则 $\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t})$,

其中 \bar{t} 为 t 的共轭复数.

注意到 $t \cdot \bar{t} = 1$ 及 $t^k + \bar{t}^k = 2\cos kx$ 我们有

$$\begin{aligned}\sin^{2p} x &= \frac{1}{(2i)^{2p}} (t - \bar{t})^{2p} \\&= \frac{1}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k t^{2p-k} \bar{t}^k \\&= \frac{1}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k t^{2p-2k} \\&= (-1)^p \frac{C_{2p}^p}{(2i)^{2p}} + \frac{1}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k t^{2p-2k} \\&\quad + \frac{1}{(2i)^{2p}} \sum_{k=p+1}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k t^{2p-2k} \\&= (-1)^p \frac{C_{2p}^p}{(2i)^{2p}} + \frac{2}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k \cos(2p-2k)x.\end{aligned}$$

所以 $(\sin^{2p} x)^{(n)}$

$$\begin{aligned}&= \frac{2}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k (2p-2k)^n \cos\left[(2p-2k)x + \frac{n\pi}{2}\right] \\&= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{k+p} \cdot 2^{n-2p+1} (p-k)^n C_{2p}^k \cos\left[(2p-2k)x + \frac{n\pi}{2}\right].\end{aligned}$$

【1216】 求 $f^{(n)}(x)$, 若:

(1) $f(x) = \sin^{2p-1} x$;

(2) $f(x) = \cos^{2p} x$;

(3) $f(x) = \cos^{2p+1} x$,

其中 p 为正整数(参阅上题)

如果

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x),$$

其中 i 为虚数单位, 且 $f_1(x), f_2(x)$ 为实数变量 x 的实数函数, 则根据定义取: $f'(x) = f'_1(x) + if'_2(x)$.

解 (1) 设 $t = \cos x + i\sin x$,

则 $\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t}),$

$$\begin{aligned}\sin^{2p+1} x &= \frac{1}{(2i)^{2p+1}} \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k \cdot C_{2p+1}^k t^{2p+1-k} \bar{t}^k \\ &= \frac{1}{(2i)^{2p+1}} \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k C_{2p+1}^k t^{2p+1-2k} \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} 2^{-2p} C_{2p+1}^k \sin(2p+1-2k)x.\end{aligned}$$

所以 $(\sin^{2p+1} x)^{(n)} = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_{2p+1}^k \frac{(2p+1-2k)^n}{2^{2p}} \cdot \sin\left[(2p+1-2k)x + \frac{n\pi}{2}\right].$

类似地, 我们可得:

$$\begin{aligned}(2) \quad (\cos^{2p} x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{p-1} 2^{n-2p+1} (p-k)^n C_{2p}^k \cos\left[(2p-2k)x + \frac{n\pi}{2}\right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad (\cos^{2p+1} x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^p \frac{(2p+1-2k)^n}{2^{2p}} C_{2p+1}^k \cos\left[(2p+1-2k)x + \frac{n\pi}{2}\right].\end{aligned}$$

【1217】 利用恒等式

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right),$$

证明: $\left(\frac{1}{x^2+1} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1)\operatorname{arccot} x].$

提示: 运用莫伊弗尔公式.

证 将复数 $x+i$ 及 $x-i$ 化为三角形式

$$x+i = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

$$x-i = r(\cos\theta - i\sin\theta),$$

其中 $r = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}, \theta = \operatorname{arccot} x$,

则 $(x+i)^k = r^k (\cos k\theta + i \sin k\theta),$

$(x-i)^k = r^k (\cos k\theta - i \sin k\theta),$

$$\begin{aligned}
 \text{于是} \quad & \left(\frac{1}{x^2+1} \right)^{(n)} \\
 &= \frac{1}{2i} \left[\left(\frac{1}{x-i} \right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+i} \right)^{(n)} \right] \\
 &= \frac{1}{2i} \left[\frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}} \right] \\
 &= \frac{(-1)^n n!}{2i(x^2+1)^{n+1}} [(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}] \\
 &= \frac{(-1)^n n!}{2i(x^2+1)^{n+1}} \{ r^{n+1} [\cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta] \\
 &\quad - r^{n+1} [\cos(n+1)\theta - i \sin(n+1)\theta] \} \\
 &= \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{n+1}} r^{n+1} \sin(n+1)\theta \\
 &= \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1)\operatorname{arccot} x].
 \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \left(\frac{1}{x^2+1} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1)\operatorname{arccot} x] \quad (x \neq 0).$$

【1218】 求函数 $f(x) = \arctan x$ 的 n 阶导数.

$$\text{解} \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

由 1217 题的结果, 有

$$\begin{aligned}
 f^{(n)}(x) &= \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{(n-1)} \\
 &= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}} \sin(n \operatorname{arccot} x).
 \end{aligned}$$

求 $f^{(n)}(0)$, 若 (1219 ~ 1222).

$$\text{【1219】} \quad (1) \quad f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1+x)};$$

$$(2) f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) f(x) &= \frac{1}{(1-2x)(1+x)} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-2x} \right). \end{aligned}$$

$$\text{所以 } f^{(n)}(x) = \frac{1}{3} \left[\frac{(-n)^n n!}{(1+x)^{n+1}} + \frac{n! 2^{n+1}}{(1-2x)^{n+1}} \right],$$

$$\text{故 } f^{(n)}(0) = \frac{n!}{3} [(-1)^n + 2^{n+1}].$$

$$(2) f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}} = -\sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2n-3}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}} \\ &= \frac{(2n-3)!!}{2^n} \frac{1}{(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}} \\ &\quad + \frac{(2n-1)!!}{2^n} \frac{1}{(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } f^{(n)}(0) &= \frac{(2n-3)!!}{2^n} + \frac{(2n-1)!!}{2^n} \\ &= \frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}} \quad (n > 1). \end{aligned}$$

$$\text{【1220】 } (1) f(x) = x^2 e^{ax};$$

$$(2) f(x) = \arctan x;$$

$$(3) f(x) = \arcsin x.$$

$$\text{解 } (1) f^{(n)}(x)$$

$$= x^2 a^n e^{ax} + 2nx \cdot a^{n-1} e^{ax} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2a^{n-2} e^{ax}$$

$$= a^{n-2} e^{ax} [a^2 x^2 + 2nax + n(n-1)].$$

$$\text{所以 } f^{(n)}(0) = n(n-1)a^{n-2}.$$

(2) 由 1218 题有

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}} \sin(n \operatorname{arccot} x),$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \sin \frac{n\pi}{2},$$

$$f^{(2k)}(0) = 0, f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k(2k)!$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots).$$

$$(3) y' = f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'' = f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y'(0) = f'(0) = 1, y''(0) = f''(0) = 0,$$

并且 $(1-x^2)y'' - xy' = 0.$

对上式两边求 n 阶导数并应用莱布尼兹公式, 有

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} = 0,$$

即 $(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0.$

令 $x = 0$ 代入上式得 $y^{(n+2)}(0) = n^2y^{(n)}(0),$

因此 $y^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(0) = 0,$

$$\begin{aligned} y^{(2k+1)}(0) &= (2k-1)^2 y^{(2k-1)}(0) \\ &= (2k-1)^2 (2k-3)^2 y^{(2k-2)}(0) \\ &= \dots \\ &= [(2k-1)(2k-3)\cdots 1]^2 y'(0) \\ &= [(2k-1)!!]^2 \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

【1221】 (1) $f(x) = \cos(\operatorname{arcsin} x);$

(2) $f(x) = \sin(\operatorname{arcsin} x).$

解 (1) $y' = -\frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \sin(\operatorname{arcsin} x),$

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{m^2}{1-x^2} \cos(\operatorname{arcsin} x) \\ &\quad - \frac{mx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \sin(\operatorname{arcsin} x). \end{aligned}$$

所以 $y'(0) = 0, y''(0) = -m^2,$

并且有 $(1-x^2)y'' - xy' + m^2y = 0$.

上式两边对 x 求 n 阶导数, 并利用莱布尼兹公式, 得

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} + m^2y^{(n)} = 0,$$

即 $(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} + (m^2 - n^2)y^{(n)} = 0$

令 $x = 0$, 得

$$y^{(n+2)}(0) = (n^2 - m^2)y^{(n)}(0).$$

由于 $y'(0) = 0$,

所以 $y^{(2k+1)}(0) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots);$

又 $y''(0) = -m^2$,

所以 $y^{(2k)}(0)$

$$= [(2k-2)^2 - m^2]y^{(2k-2)}(0)$$

$$= [(2k-2)^2 - m^2][(2k-4)^2 - m^2]y^{(2k-4)}(0)$$

$$= [(2k-2)^2 - m^2][(2k-4)^2 - m^2] \cdots [2^2 - m^2](-m^2) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

$$(2) \quad y' = f'(x) = \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \cos(\operatorname{arcsin} x),$$

$$y'' = f''(0)$$

$$= -\frac{m^2}{1-x^2} \sin(\operatorname{arcsin} x) + \frac{mx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \cos(\operatorname{arcsin} x).$$

所以 $y'(0) = f'(0) = m, y''(0) = f''(0) = 0$,

并且有 $(1-x^2)y'' - xy' + m^2y = 0$.

上式两边对 x 求 n 阶导数, 并利用莱布尼兹公式得

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} + m^2y^{(n)} = 0,$$

即 $(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} + (m^2 - n^2)y^{(n)} = 0$.

令 $x = 0$, 得

$$y^{(n+2)}(0) = (n^2 - m^2)y^{(n)}(0).$$

由于 $y''(0) = 0$,

故 $y^{(2k)}(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$

又由于 $y'(0) = m$,

$$\begin{aligned}
 \text{故 } y^{(2k+1)}(0) &= [(2k-1)^2 - m^2] y^{(2k-1)}(0) \\
 &= [(2k-1)^2 - m^2] [(2k-3)^2 - m^2] y^{(2k-3)}(0) \\
 &= \dots \\
 &= [(2k-1)^2 - m^2] [(2k-3)^2 - m^2] \dots [1^2 - m^2] \cdot m \\
 &\quad (k = 1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

【1222】 (1) $f(x) = (\arctan x)^2$;

(2) $f(x) = (\arcsin x)^2$.

解 (1) 由 1220 题(2) 的结果有

$$(\arctan x)^{(2k)} \Big|_{x=0} = 0,$$

$$(\arctan x)^{(2k+1)} \Big|_{x=0} = (-1)^k (2k)!$$

而 $(2k-1)-j$ 与 j ($0 \leq j \leq 2k-1$) 中有一个为偶数, 故

$$\begin{aligned}
 f^{(2k-1)}(0) &= (\arctan x \cdot \arctan x)^{(2k-1)} \Big|_{x=0} \\
 &= \sum_{j=0}^{2k-1} C_{2k-1}^j (\arctan x)^{(j)} \cdot (\arctan x)^{(2k-1-j)} \Big|_{x=0} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^{(2k)}(0) &= (\arctan x \cdot \arctan x)^{(2k)} \Big|_{x=0} \\
 &= \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i (\arctan x)^{(i)} \cdot (\arctan x)^{(2k-i)} \Big|_{x=0} \\
 &= \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^{2i+1} (\arctan x)^{(2i+1)} \cdot (\arctan x)^{(2k-2i-1)} \Big|_{x=0} \\
 &= \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^{2i+1} (-1)^i (2i)! (-1)^{k-i-1} (2k-2i-2)! \\
 &= (-1)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(2k)!}{(2i+1)!(2k-2i-1)!} \\
 &\quad \cdot (2i)!(2k-2i-2)! \\
 &= (-1)^{k-1} (2k)! \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(2i+1)(2k-2i-1)} \\
 &= (-1)^{k-1} (2k)! \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2i+1} + \frac{1}{2k-2i-1} \right) \\
 &= (-1)^k (2k-1)! \cdot 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} \right) \\
 &\quad (k = 1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

$$(2) f'(x) = 2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x,$$

即 $\sqrt{1-x^2} f'(x) = 2 \arcsin x.$

上式两边再对 x 求导得

$$\sqrt{1-x^2} f''(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

即 $(1-x^2) f''(x) - x f'(x) - 2 = 0.$

上式两边再对 x 求 n 阶导数, 并利用莱布尼兹公式得

$$(1-x^2) f^{(n+2)}(x) - 2nx f^{(n+1)}(x) - n(n-1) f^{(n)}(x) - x f^{(n+1)}(x) - n f^{(n)}(x) = 0,$$

即 $(1-x^2) f^{(n+2)}(x) - (2n+1)x f^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0.$

令 $x = 0$, 得

$$f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0),$$

而 $f'(0) = 0, f''(0) = 2.$

所以 $f^{(2k+1)}(0) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(0) &= (2k-2)^2 \cdot (2k-4)^2 \cdot \dots \cdot 2^2 f''(0) \\ &= 2^{2k-1} [(k-1)!]^2 \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

【1223】 若 $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$, 求 $f^{(n)}(a)$,

其中函数 $\varphi(x)$ 在 a 点的邻域内有 $(n-1)$ 阶的连续导数.

解 由莱布尼兹公式有

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(x) &= (x-a)^n \varphi^{(n-1)}(x) + C_{n-1}^1 n(x-a)^{n-1} \varphi^{(n-2)}(x) + \dots \\ &\quad + C_{n-1}^{n-2} n(n-1) \dots 3(x-a)^2 \varphi'(x) + n!(x-a) \varphi(x), \end{aligned}$$

于是 $f^{(n-1)}(a) = 0,$

根据定义有

$$\begin{aligned} f^{(n)}(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} [(x-a)^{n-1} \varphi^{(n-1)}(x) + C_{n-1}^1 n(x-a)^{n-2} \varphi^{(n-2)}(x) + \dots \\ &\quad + C_{n-1}^{n-2} n(n-1) \dots 3(x-a) \varphi'(x) + n! \varphi(x)] \\ &= n! \varphi(a). \end{aligned}$$

【1224】 证明:函数

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \frac{1}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$$

(n 为自然数) 在点 $x = 0$ 有直到 n (包括 n) 阶的导数而没有 $(n+1)$ 阶导数.

证 由莱布尼兹公式, 当 $x \neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \left(x^{2n} \sin \frac{1}{x} \right)^{(m)} \\ &= \sum_{k=0}^m C_m^k (x^{2n})^{(m-k)} \left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(k)}, \end{aligned}$$

首先, 我们用归纳法证明下面的等式

$$\begin{aligned} \left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(k)} &= \sum_{i=1}^{k-1} \left[a_i x^{-(k+i)} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{i\pi}{2} \right) \right] \\ &\quad + (-x^{-2})^k \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) \quad (x \neq 0), \end{aligned}$$

其中 a_i 是常数 (仅依赖于 k 和 i).

$$\text{因为 } \left(\sin \frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2} \right),$$

即当 $k = 1$ 时, 等式成立.

设当 $k = N$ 时, 等式成立. 则有

$$\begin{aligned} \left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(N+1)} &= \left[\left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(N)} \right]' \\ &= \left[\sum_{i=1}^{N-1} a_i x^{-(N+i)} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{i\pi}{2} \right) + (-x^{-2})^N \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{N\pi}{2} \right) \right]' \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} a_i \left[-(N+i) x^{-(N+1+i)} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{i\pi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + x^{-(N+i)} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{(i+1)\pi}{2} \right) \right] \\ &\quad + \left[N(-x^{-2})^{N-1} \cdot (2x^{-3}) \cdot \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{N\pi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + (-x^{-2})^{N+1} \cdot \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{N+1}{2}\pi \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{(N+1)-1} b_i x^{-(N+1+i)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{i\pi}{2}\right) \\ + (-x^{-2})^{N+1} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{N+1}{2}\pi\right).$$

其中 b_i 是仅依赖于 i 与 $N+1$ 的常数.

由归纳法知等式对一切自然数均成立. 因此, 我们有

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^m C_m^k \cdot \frac{(2n)!}{(2n-m+k)!} x^{2n-m+k} \\ \cdot \left[\sum_{i=1}^{k-1} a_i x^{-(k+i)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2}\right) \right. \\ \left. + (-x^{-2})^k \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2}\right) \right] \quad (x \neq 0),$$

$$\text{于是} \quad f^{(m)}(x) = (-1)^m x^{2(n-m)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{m\pi}{2}\right) \\ + O(|x|^{2(n-m)+1}) \quad (x \rightarrow 0) \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{由于} \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} x^{2n-1} \sin \frac{1}{x} = 0,$$

$$\text{从而} \quad f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-x^{2n-3} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}\right) + O(|x|^{2(n-1)}) \right] = 0.$$

依此类推可得

$$f'''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0,$$

$$\text{而} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(-1)^n}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2}\right) + O(1) \right],$$

在 $x=0$ 的任一邻域内

$$\frac{(-1)^n}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2}\right),$$

无界且振荡, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(-1)^n}{x} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2}\right) + O(1) \right]$ 不存在. 因此, $f^{(n+1)}(0)$ 不存在.

【1225】 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处无穷次可微分. 作出此函数的图形.

证 首先, 我们证明, 对任何自然数 n , 均有

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0),$$

其中 $P_n(t)$ 是关于 t 的多项式, 我们用数学归纳法证明. 因为

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

所以当 $n = 1$ 时, 命题成立.

设当 $n = k$ 时, 命题成立, 即

$$f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_k\left(\frac{1}{x}\right),$$

其中 $P_k(t)$ 是关于 t 的多项式. 而

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left[e^{-\frac{1}{x^2}} P_k\left(\frac{1}{x}\right) \right]' \\ &= \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot P_k\left(\frac{1}{x}\right) + e^{-\frac{1}{x^2}} P'_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}} \left\{ 2\left(\frac{1}{x}\right)^3 P_k\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x}\right)^2 P'_k\left(\frac{1}{x}\right) \right\} \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}} P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

其中 $P_{k+1}(t) = 2t^3 P_k(t) - t^2 P'_k(t)$ 是关于 t 的多项式. 即命题当 $n = k + 1$ 时成立.

由归纳法知对任何自然数 n 均有

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0),$$

而对任何自然数 n 均有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0,$$

下面我们再用数学归纳法证明, 对任何自然数 n 均有

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

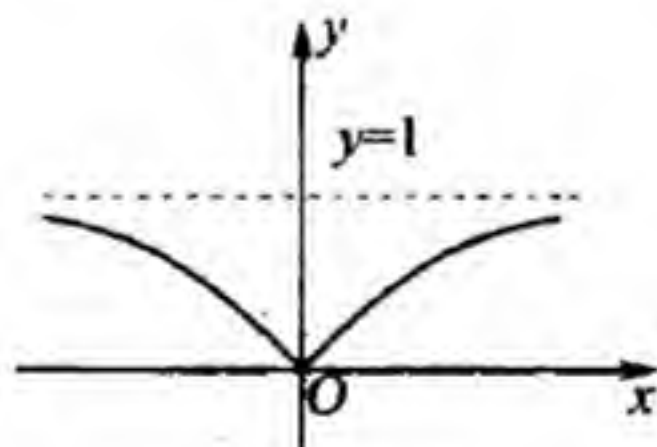
事实上 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0,$

即当 $n = 1$ 时, 结论成立.

设 $f^{(k)}(0) = 0$, 即当 $n = k$ 时, 结论成立. 则

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0. \end{aligned}$$

因此, 根据数学归纳法, 知对任何自然数 n 都有 $f^{(n)}(0) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 无穷多次可微且各阶导数均为 0, 其图象如 1225 题图所示



1225 题图

【1226】 证明: 切贝绍夫多项式

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos(m \arccos x) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

满足方程 $(1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2 T_m(x) = 0$.

证 $T_m'(x) = \frac{m}{2^{m-1}} \frac{\sin(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$

$$\begin{aligned} T_m''(x) &= -\frac{m^2}{2^{m-1}(1-x^2)} \cos(m \arccos x) \\ &\quad + \frac{mx}{2^{m-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \sin(m \arccos x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{于是} \quad (1-x^2)T_m''(x) &= -\frac{m^2}{2^{m-1}}\cos(\arccos x) \\
 &\quad + \frac{mx}{2^{m-1}\sqrt{1-x^2}}\sin(\arccos x) \\
 &= -m^2 T_m(x) + xT_m'(x),
 \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad (1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2 T_m(x) = 0.$$

【1227】 证明:勒让德多项式

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} [(x^2-1)^m]^{(m)} \quad (m=0,1,2,\dots),$$

满足方程式

$$\begin{aligned}
 (1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1) \\
 P_m(x) &= 0.
 \end{aligned}$$

提示:将等式 $(x^2-1)u' = 2mxu$ 微分 $m+1$ 次,其中 $u = (x^2-1)^m$.

证 设 $u = (x^2-1)^m$, 则

$$u' = 2mx \cdot (x^2-1)^{m-1},$$

从而 $(x^2-1)u' = 2mxu$,

将上面的等式微分 $m+1$ 次,并利用莱布尼兹公式有

$$\begin{aligned}
 (x^2-1)u^{(m+2)} + 2(m+1)xu^{(m+1)} + m(m+1)u^{(m)} \\
 = 2mxu^{(m+1)} + 2m(m+1)u^{(m)},
 \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad (x^2-1)u^{(m+2)} + 2xu^{(m+1)} - m(m+1)u^{(m)} = 0.$$

上式两边同乘以 $-\frac{1}{2^m m!}$, 并注意到

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} u^{(m)},$$

$$\text{就得到} \quad (1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0.$$

【1228】 切贝绍夫—拉盖尔多项式用下式确定:

$$L_m(x) = e^x (x^m e^{-x})^{(m)} \quad (m=0,1,2,\dots),$$

求出多项式 $L_m(x)$ 的显式.

证明: $L_m(x)$ 满足方程式

$$xL_m''(x) + (1-x)L_m'(x) + mL_m(x) = 0,$$

提示:利用等式 $xu' + (x-m)u = 0$, 其中 $u = x^m e^{-x}$.

证 由莱布尼兹公式有

$$\begin{aligned} L_m(x) &= e^x [(-1)^m x^m e^{-x} + (-1)^{m-1} C_m^1 m x^{m-1} e^{-x} + \cdots \\ &\quad + (-1) \cdot C_m^{m-1} m(m-1) \cdots 2 x e^{-x} + m! e^{-x}] \\ &= (-1)^m [x^m - m^2 x^{m-1} + \cdots \\ &\quad + (-1)^{m-1} m^2 (m-1)! x + (-1)^m m!]. \end{aligned}$$

下面证明 $L_m(x)$ 满足方程

$$xL_m''(x) + (1-x)L_m'(x) + mL_m(x) = 0,$$

设 $u = x^m e^{-x}$,

则 $u' = mx^{m-1}e^{-x} - x^m e^{-x} = \frac{m}{x}u - u,$

即 $xu' + (x-m)u = 0.$

在上式两边对 x 求 $(m+1)$ 阶导数, 并利用莱布尼兹公式得

$$\begin{aligned} xu^{(m+2)} + (m+1)u^{(m+1)} + (x-m)u^{(m+1)} \\ + (m+1)u^{(m)} = 0, \end{aligned}$$

即 $xu^{(m+2)} + (x+1)u^{(m+1)} + (m+1)u^{(m)} = 0.$

再设 $y = u^{(m)}$, 则由上式可得

$$xy'' + (x+1)y' + (m+1)y = 0,$$

而 $L_m(x) = e^x \cdot y,$

故 $L_m'(x) = e^x(y' + y),$

$$L_m''(x) = e^x(y'' + 2y' + y).$$

因此
$$\begin{aligned} xL_m''(x) + (1-x)L_m'(x) + mL_m(x) \\ &= e^x \{x(y'' + 2y' + y) + (1-x)(y' + y) + my\} \\ &= e^x \{xy'' + (x+1)y' + (m+1)y\} \\ &= e^x \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

【1229】 设 $y = f(u), u = \varphi(x)$, 其中 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 都是可微分 n 次的函数. 证明:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^n A_k(x) f^{(k)}(u),$$

其中系数 $A_k(x) (k = 0, 1, \cdots, n)$ 同函数 $f(u)$ 无关.

证 我们用数学归纳法证明命题, 因为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(x),$$

所以当 $n=1$ 时,命题成立.

设当 $n=m$ 时,命题成立. 即

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{k=1}^m A_k(x) f^{(k)}(u),$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} &= \left(\sum_{k=1}^m A_k(x) f^{(k)}(u) \right)' \\ &= \sum_{k=1}^m [A'_k(x) f^{(k)}(u) + A_k(x) f^{(k+1)}(u) \varphi'(x)] \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} B_k(x) f^{(k)}(u), \end{aligned}$$

其中 $B_1(x) = A'_1(x)$,

$$B_k(x) = A'_k(x) + A_{k-1}(x)\varphi'(x) \quad (k=2, \dots, m),$$

$$B_{m+1} = A_m(x)\varphi'(x),$$

它们均与函数 $f(u)$ 无关.

因此,根据数学归纳法,对一切自然数 n ,均有

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^m A_k(x) f^{(k)}(u).$$

【1230】 证明:对于复合函数 $y = f(x^2)$ 的 n 阶导数,以下公式成立:

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} &= (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) + \dots \end{aligned}$$

证 我们用数学归纳证明此命题,因为

$$\frac{dy}{dx} = 2xf'(x^2).$$

所以,当 $n=1$ 时,命题成立.

设当 $n=m$ 时,命题成立. 即

$$\frac{d^m y}{dx^m} = (2x)^m f^{(m)}(x^2) + \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-2} f^{(m-1)}(x^2)$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} (2x)^{m-4} f^{(m-2)}(x^2)$$

+ ...,

所以
$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^m y}{dx^m} \right) \\ &= (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) + 2m(2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\ &\quad + \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\ &\quad + \frac{m(m-1)}{1!} 2(m-2)(2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) \\ &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} 2(m-4)(2x)^{m-5} f^{(m-2)}(x^2) \\ &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \dots \\ &= (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) + \left[2m + \frac{m(m-1)}{1!} \right] (2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\ &\quad + \left[\frac{2m(m-1)(m-2)}{1!} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \right] (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) \\ &\quad + \dots \\ &= (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) + \frac{(m+1)m}{1!} (2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\ &\quad + \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{2!} (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \dots, \end{aligned}$$

即当 $n = m+1$ 时, 命题也成立. 由数学归纳法知, 命题对一切自然数 n 均成立.

【1231】 切贝绍夫—埃尔米特多项式用下式确定:

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} (e^{-x^2})^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

求出多项式 $H_m(x)$ 的显式.

证明: $H_m(x)$ 满足方程式

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

提示: 利用等式 $u' + 2xu = 0$, 其中 $u = e^{-x^2}$.

证 设 $u = e^{-x^2}$, 则

$$u' = -2xe^{-x^2} = -2xu,$$

$$u'' = e^{-x^2} [(-2x)^2 - 2] = e^{-x^2} [(-1)^2 (2x)^2 - 2].$$

利用数学归纳法可证明

$$u^{(m)} = \left[(-1)^m (2x)^m + (-1)^{m-1} \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-2} + (-1)^{m-2} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} (2x)^{m-4} + \dots \right] e^{-x^2}.$$

所以 $H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \cdot u^{(m)}$

$$= (2x)^m - \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} (2x)^{m-4} - \dots.$$

又 $u' + 2xu = 0.$

上式两边对 x 求 $(m+1)$ 阶导数, 并利用莱布尼兹公式, 得

$$u^{(m+2)} + 2xu^{(m+1)} + 2(m+1)u^{(m)} = 0.$$

令 $y = u^{(m)}$, 则有

$$y'' + 2xy' + 2(m+1)y = 0.$$

而 $H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} y.$

所以 $H'_m(x) = (-1)^m e^{x^2} (y' + 2xy);$

$$H''_m(x) = (-1)^m e^{x^2} [y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y].$$

因此 $H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x)$

$$= (-1)^m e^{x^2} \{ y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y - 2x(y' + 2xy) + 2my \}$$

$$= (-1)^m e^{x^2} [y'' + 2xy' + 2(m+1)y] = 0.$$

【1232】 证明等式 $(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}.$

提示: 运用数学归纳法.

证 因为 $(e^{\frac{1}{x}})' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$

所以当 $n = 1$ 时, 等式成立.

设当 $n = k$ 时, 等式成立. 则有

$$(x^k e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)}$$

$$\begin{aligned}
&= [(x \cdot x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k)}]' \\
&= [x(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k)} + k(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)}]' \\
&= \left[x \cdot \frac{(-1)^k}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}} + k(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)} \right]' \\
&= \frac{(-1)^{k+1} k}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}} e^{\frac{1}{x}} + k(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k)} \\
&= \frac{(-1)^{k+1} k}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}} e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^k k}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}} e^{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

因此, 根据数学归纳法, 对一切自然数 n 有

$$(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}.$$

【1232. 1】 求证公式

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n \ln x) = n! \left(\ln x + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \quad (x > 0).$$

证 我们用数学归纳法证明等式. 因为

$$\frac{d}{dx}(x \ln x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \quad (x > 0),$$

即当 $n = 1$ 时, 等式成立.

现设 $n = k$ 时等式成立, 即

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^k \ln x) = k! \left(\ln x + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \right) \quad (x > 0).$$

下面证明当 $n = k + 1$ 时等式成立.

$$\begin{aligned}
&\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x^{k+1} \ln x) \\
&= \{ [x \cdot (x^k \ln x)]^{(k)} \}' \\
&= [x(x^k \ln x)^{(k)} + k(x^k \ln x)^{(k-1)}]' \\
&= \left[k! x \left(\ln x + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \right) \right]' + k(x^k \ln x)^{(k)} \\
&= k! \left(\ln x + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \right) + k! x \cdot \frac{1}{x} + k \cdot k! \left(\ln x + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \right)
\end{aligned}$$

$$= (k+1)! \left(\ln x + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \right) + k!$$

$$= (k+1)! \left(\ln x + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i} \right).$$

根据数学归纳法, 对任何正整数 n 都有

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n \ln x) = n! \left(\ln x + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \quad (x > 0).$$

【1232. 2】. 证明公式:

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}} [C_n(x) \sin x - S_n(x) \cos x],$$

其中 $C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$

$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

证 因为

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\sin x}{x} \right) &= \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \right)' \\ &= \frac{-x \sin x \cdot x^2 - 2x(x \cos x - \sin x)}{x^4} \\ &= \frac{(2 - x^2) \sin x - 2x \cos x}{x^3} \\ &= \frac{(2 \cdot 1)!}{x^3} \left[\left(1 - \frac{x^2}{2!} \right) \sin x - x \cdot \cos x \right]. \end{aligned}$$

现假设对于整数 n , 公式成立, 即

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}} [C_n(x) \sin x - S_n(x) \cos x],$$

其中 $C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$

$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

下面我们证明对整数 $(n+1)$, 公式也成立. 注意到

$$C'_n(x) + S_n(x) = 0,$$

$$C_n(x) - S'_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$S'_{n+1}(x) - C_n(x) = 0,$$

$$S_{n+1}(x) + C_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

我们有

$$\begin{aligned} & \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \\ &= \left\{ \frac{(2n)!}{x^{2n+1}} [C_n(x) \sin x - S_n(x) \cos x] \right\}' \\ &= (2n)! \left\{ \frac{C'_n(x) \sin x + C_n(x) \cos x - S'_n(x) \cos x + S_n(x) \sin x}{x^{2n+1}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(2n+1)[C_n(x) \sin x - S_n(x) \cos x]}{x^{2n+2}} \right\} \\ &= (2n+1)! \frac{S_{n+1}(x) \cos x - C_n(x) \sin x}{x^{2n+2}}, \frac{d^{2(n+1)}}{dx^{2(n+1)}} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \\ &= \left\{ (2n+1)! \frac{S_{n+1}(x) \cos x - C_n(x) \sin x}{x^{2n+2}} \right\}' \\ &= (2n+1)! \left\{ \frac{S'_{n+1}(x) \cos x - S_{n+1}(x) \sin x - C'_n(x) \sin x - C_n(x) \cos x}{x^{2n+2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(n+1)[S_{n+1}(x) \cos x - C_n(x) \sin x]}{x^{2n+3}} \right\} \\ &= \frac{[2(n+1)]!}{x^{2n+3}} [C_{n+1}(x) \sin x - S_{n+1}(x) \cos x]. \end{aligned}$$

即对整数 $(n+1)$, 公式成立.

因此, 根据数学归纳法, 对任何自然数 n , 都有

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}} [C_n(x) \sin x - S_n(x) \cos x].$$

【1233】 设 $\frac{d}{dx} = D$ 表示微分算子且

$$f(D) = \sum_{k=0}^n P_k(x) D^k,$$

为微分符号多项式, 其中 $P_k(x) (k = 0, 1, \dots, n)$ 是关于 x 的连续

函数.

证明: $f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x)$

其中 λ 为常数.

证 根据莱布尼兹公式有

$$\begin{aligned} D^k\{e^{\lambda x}u(x)\} &= \{e^{\lambda x}u(x)\}^{(k)} \\ &= \sum_{i=0}^k C_k^i (e^{\lambda x})^{(i)} u^{(k-i)}(x) \\ &= e^{\lambda x} \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda^i u^{(k-i)}(x), \end{aligned}$$

而另一方面

$$\begin{aligned} (D+\lambda)^k(u(x)) &= \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda^i D^{(k-i)}u(x) \\ &= \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda^i u^{(k-i)}(x). \end{aligned}$$

所以 $D^k\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x}(D+\lambda)^k\{u(x)\},$

$$\begin{aligned} \text{因此 } f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} &= \sum_{k=0}^n P_k(x) D^k\{e^{\lambda x}u(x)\} \\ &= \sum_{k=0}^n P_k(x) \cdot e^{\lambda x} (D+\lambda)^k u(x) \\ &= e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n P_k(x) (D+\lambda)^k u(x) \\ &= e^{\lambda x} f(D+\lambda)u(x), \end{aligned}$$

即 $f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x).$

【1234】 证明:如果在方程 $\sum_{k=0}^n a_k x^k y_r^{(k)} = 0$ 中, 设 $x = e^t$, 其中 t 为自变数, 则这个方程具有以下形式

$$\sum_{k=0}^n a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y = 0,$$

其中 $D = \frac{d}{dt}$.

证 因为 $x = e^t$, 所以, 我们有

$$Dy = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = e^x \frac{dy}{dx} = x \frac{dy}{dx},$$

即 $\frac{dy}{dx} = e^{-x} Dy.$

而 $\frac{d^2 y}{dx^2} = e^{-x} D\left(\frac{dy}{dx}\right) = e^{-x} D[e^{-x} Dy]$
 $= e^{-x} [-e^{-x} Dy + e^{-x} D^2 y] = e^{-2x} D(D-1)y.$

用数学归纳法可证得

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{-kx} D(D-1)\cdots(D-k+1)y. \quad \textcircled{1}$$

事实上, 设公式 ① 对 $k = m$ 成立, 则有

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^m y}{dx^m} \right) \\ &= e^{-x} D[e^{-mx} D(D-1)\cdots(D-m+1)y] \\ &= e^{-x} [-me^{-mx} D(D-1)\cdots(D-m+1)y \\ &\quad + e^{-mx} D^2(D-1)\cdots(D-m+1)y] \\ &= e^{-(m+1)x} D(D-1)\cdots(D-m+1)(D-m)y, \end{aligned}$$

即公式 ① 对 $k = m+1$ 也成立. 因此, 公式 ① 对一切自然数都成立. 所以, 有

$$x^k \frac{d^k y}{dx^k} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y,$$

因此, 原方程变为

$$\sum_{k=0}^n a_k D(D-1)\cdots D(-k+1)y = 0.$$

§ 6. 罗尔、拉格朗日和柯西定理

1. 罗尔定理 如果:

- (1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内有定义且是连续的;
- (2) $f(x)$ 在此区间内有有限的导数 $f'(x)$;
- (3) $f(a) = f(b)$, 则至少在区间 (a, b) 内存在一个数 c , 使 $f'(c) = 0$.

2. 拉格朗日定理 如果:

(1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内有定义并且是连续的;

(2) $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有有限的导数, 则

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c), \text{ 其中 } a < c < b.$$

(有限增量公式)

3. 柯西定理 如果:

(1) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内有定义并且是连续的;

(2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在开区间 (a, b) 内有有限的导数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$;

(3) 当 $a < x < b$ 时, $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$;

(4) $g(a) \neq g(b)$, 则

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ 式中 } a < c < b.$$

【1235】 检验罗尔定理对函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ 的正确性.

解 (1) 函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 及 $[2, 3]$ 上连续.

(2) $f'(x)$ 在 $(1, 2)$ 及 $(2, 3)$ 内存在.

(3) $f(1) = f(2) = 0, f(2) = f(3) = 0$.

即函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 及 $[2, 3]$ 上满足罗尔定理的条件. 故由罗尔定理, 应该存在 $c_1 \in (1, 2)$ 及 $c_2 \in (2, 3)$, 使得 $f'(c_1) = 0, f'(c_2) = 0$. 事实上

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) \\ &\quad + (x-1)(x-2) \\ &= 3x^2 - 12x + 11, \end{aligned}$$

令 $f'(x) = 0$ 解之得 $x = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$,

故取 $c_1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}, c_2 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$,

显然 $1 < c_1 < 2, 2 < c_2 < 3$,

且 $f'(c_1) = 0, f'(c_2) = 0$.

这验证了罗尔定理.

【1236】 当 $x_1 = -1$ 和 $x_2 = 1$ 时, 函数 $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ 为

零,然而当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f'(x) \neq 0$, 解释这同罗尔定理表面上的矛盾.

解 因为 $f'(x)$ 在 $x=0$ 不存在,即在 $[-1,1]$ 上, $f(x)$ 不满足罗尔定理的第二个条件,故罗尔定理结论在 $[-1,1]$ 上可以不成立.

【1237】 设函数 $f(x)$ 在有穷或无穷区间 (a,b) 内的每一点上具有有限导数 $f'(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$.

证明: $f'(c) = 0$, 其中 c 为区间 (a,b) 内的某个点.

证 当 (a,b) 为有穷区间时, 设

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a,b), \\ A, & x = a \text{ 或 } x = b, \end{cases}$$

其中 $A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$.

显然, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $F(a) = F(b)$. 故由罗尔定理知, 在 (a,b) 内至少存在一点 c , 使

$$F'(c) = 0,$$

而在 (a,b) 内有 $F'(x) = f'(x)$,

故 $f'(c) = 0$.

下面讨论 (a,b) 为无穷区间的情况.

若 $a = -\infty, b = +\infty$, 则设

$$x = \tan t \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right),$$

则 $g(t) = f(\tan t)$,

在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内连续, 可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow -\frac{\pi}{2}} g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(x),$$

故由前面的讨论知, 至少存在一点 $t_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

使 $g'(t_0) = 0$,

而 $g'(t_0) = f'(c) \cdot \sec^2 t_0$,

其中 $c = \tan t_0$.

由于 $\sec^2 t_0 \neq 0$.

故 $f'(c) = 0$.

若 a 为有限数, $b = +\infty$, 即区间为 $(a, +\infty)$, 取 $b_0 > \max\{a, 0\}$, 则映射

$$x = \frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t},$$

将区间 (a, b_0) 映为区间 $(a, +\infty)$. 复合函数

$$g(t) = f\left(\frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t}\right),$$

在区间 (a, b_0) 内满足罗尔定理的条件. 故存在 $t_0 \in (a, b_0)$ 使得 $g'(t_0) = 0$,

而 $g'(t_0) = f'(c) \cdot \frac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_0)^2}$,

其中 $c = \frac{(b_0 - a)t_0}{b_0 - t_0}$.

显然 $a < c < +\infty$,

由于 $\frac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_0)^2} \neq 0$,

故 $f'(c) = 0$.

对于 $a = -\infty, b$ 为有限数的情形可类似地讨论.

【1238】 设函数 $f(x)$,

(1) 在闭区间 $[x_0, x_n]$ 内有定义且有 $(n-1)$ 阶的连续导数 $f^{(n-1)}(x)$;

(2) 在区间 (x_0, x_n) 内有 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$;

(3) 以下等式成立:

$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) \quad (x_0 < x_1 < \cdots < x_n),$$

证明: 在区间 (x_0, x_n) 内, 最少有一个点 ξ , 以致 $f^{(n)}(\xi) = 0$.

证 在闭区间 $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \cdots, n$) 上, 函数满足罗尔定理的条件, 因此存在

$$x'_k \in (x_{k-1}, x_k) \quad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

使得 $f'(x'_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$.

所以在区间 $[x'_k, x'_{k-1}]$ ($k = 1, 2, \cdots, n-1$) 上, 函数 $f'(x)$ 满足罗

尔定理的条件. 因此, 存在

$$x_k^2 \in (x_k', x_{k+1}') \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

使得 $f''(x_k^2) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$

继续上述步骤, 经过 $(n-1)$ 次后, 得一个区间

$$[x_1^{n-1}, x_2^{n-1}] \subset (x_0, x_n),$$

满足 $f^{(n-1)}(x_1^{n-1}) = f^{(n-1)}(x_2^{n-1}) = 0,$

于是在 $[x_1^{n-1}, x_2^{n-1}]$ 上 $f^{(n-1)}(x)$ 满足罗尔定理的条件, 所以, 至少存在一点

$$\xi \in (x_1^{n-1}, x_2^{n-1}) \subset (x_0, x_n),$$

使得 $f^{(n)}(\xi) = 0.$

【1239】 设函数 $f(x)$:

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 内有定义和有 $(p+q)$ 阶的连续导数 $f^{(p+q)}(x)$;

(2) 在区间 (a, b) 内有 $(p+q+1)$ 阶的导数 $f^{(p+q+1)}(x)$;

(3) 以下等式成立:

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(p)}(a) = 0,$$

和 $f(b) = f'(b) = \dots = f^{(q)}(b) = 0,$

证明: $f^{(p+q+1)}(c) = 0$, 其中 c 为区间 (a, b) 内的某一点.

证 我们讨论三种情况.

(1) $p = q.$

在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 满足罗尔定理的条件. 因此, 至少存在一点 $x_1^{(1)} \in (a, b)$, 使得

$$f'(x_1^{(1)}) = 0,$$

再根据条件知, $f'(x)$ 在区间 $[a, x_1^{(1)}]$ 及 $[x_1^{(1)}, b]$ 上均满足罗尔定理的条件, 所以, 至少存在

$$x_1^{(2)} \in [a, x_1^{(1)}],$$

及 $x_2^{(2)} \in [x_1^{(1)}, b],$

使得 $f''(x_1^{(2)}) = f''(x_2^{(2)}) = 0.$

继续上述步骤, 经过 p 次后, 得到 $p+2$ 个点

$$a, x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_p^{(p)}, b,$$

使得 $f^{(p)}(a) = f^{(p)}(x_1^{(p)}) = \cdots = f^{(p)}(x_p^{(p)})$
 $= f^{(p)}(b) = 0.$

对 $F(x) = f^{(p)}(x)$ 应用 1238 题的结果知, 存在

$$c \in (a, b),$$

使得 $F^{(p+1)}(c) = 0,$

即 $f^{(2p+1)}(c) = 0.$

(2) $q > p.$

设 $q = p + k$ (k 为某正整数)

对 $f(x)$ 重复运用 $(p+1)$ 次罗尔定理, 知在 (a, b) 内存在 $(p+1)$ 个点

$$y_1, y_2, \cdots, y_{p+1},$$

满足 $f^{(p+1)}(y_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, p+1),$

再注意 $f^{(p+1)}(b) = \cdots = f^{(p+k)}(b) = 0.$

对 $f^{(p+1)}(x)$ 重复应用 k 次罗尔定理, 得在 (a, b) 内存在 $(p+1)$ 个点

$$z_1, z_2, \cdots, z_{p+1},$$

使得 $f^{(p+k+1)}(z_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, p+1).$

再将 1238 题的结果应用到 $F(x) = f^{(p+k+1)}(x)$ 知存在

$$c \in (z_1, z_{p+1}) \subset (a, b),$$

使得 $F^{(p)}(c) = 0,$

即 $f^{(p+q+1)}(c) = 0.$

(3) $p > q$ 时, 类似地讨论可得结论.

【1240】 求证: 如果带有实系数 a_k ($k = 0, 1, \cdots, n$) 的多项式

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

的所有根为实数, 则它的逐次导数 $P'_n(x), P''_n(x), \cdots, P_n^{(n-1)}(x)$ 也只有实根.

证 设 $P_n(x)$ 的根为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$, 其中 α_i 的重数为 n_i ($i = 1, 2, \cdots, k$). 则根据题设有 α_i ($i = 1, 2, \cdots, k$) 均为实数, 并且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, 于是, 我们有

$$P_n(x) = a_0 (x - \alpha_1)^{n_1} (x - \alpha_2)^{n_2} \cdots (x - \alpha_k)^{n_k},$$

显然, α_i 为 $P'_n(x)$ 的 $n_i - 1$ 重根 ($i = 1, 2, \cdots, k$). 由于

$$P_n(a_1) = P_n(a_2) = \cdots = P_n(a_k) = 0,$$

$P_n(x)$ 可微, 由罗尔定理, 存在

$$\eta_i \in (a_i, a_{i+1}),$$

使得 $P'_n(\eta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k-1),$

即 $\eta_1, \cdots, \eta_{k-1}$ 为 $P'_n(x)$ 的根. 又

$$(k-1) + \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = \sum_{i=1}^k n_i - 1 = n - 1.$$

注意到 $P'_n(x)$ 是 $(n-1)$ 次多项式, 因而它只有 $(n-1)$ 个根. 因此 $P'_n(x)$ 的所有根为

$$a_1, \cdots, a_k, \eta_1, \cdots, \eta_{k-1},$$

它们均为实数. 这样我们证明了一个 n 次实系数多项式, 如果它的 n 个根均为实数, 则它的导函数的 $n-1$ 个根也必全为实根. 将这样的结果应用到 $P'_n(x)$ 上, 可得 $P'_n(x)$ 的根全为实根. 依此类推, 便可得到 $P'_n(x), P''_n(x), \cdots, P_n^{(n-1)}(x)$ 都只有实根.

【1241】 证明: 勒让德多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\},$$

所有根都是实数且包含在区间 $(-1, 1)$ 内.

证 设 $Q_{2n}(x) = (x^2 - 1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$

$Q_{2n}(x)$ 为 $2n$ 次多项式, 且仅有实根, 其中 $x = -1$ 为 n 重根, $x = 1$ 也为 n 重根. 因此, 根据 1240 题的结果知

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} Q_{2n}(x),$$

也仅有实根, 且都位于 $[-1, 1]$ 上. 因为 -1 为 $Q_{2n}(x)$ 的 n 重根, 故 -1 不是 $\frac{d^n}{dx^n} Q_{2n}(x)$ 的根, 因而也不是 $P_n(x)$ 的根. 同理 1 也不是 $P_n(x)$ 的根, 因此, $P_n(x)$ 的根全部位于 $(-1, 1)$ 中.

【1242】 证明: 切贝绍夫—拉盖尔多项式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}),$$

所有根都是正数.

证 设 $Q(x) = x^n e^{-x},$

则由莱布尼兹公式得

$$\begin{aligned} Q^{(m)}(x) &= e^{-x} [(-1)^m x^n + (-1)^{m-1} C_m^1 n x^{n-1} + \cdots \\ &\quad + (-1) C_m^{m-1} n(n-1) \cdots (n-m+2) x^{n-m+1} \\ &\quad + n(n-1) \cdots (n-m+1) x^{n-m}] \\ &\quad (m=1, 2, \cdots, n). \end{aligned}$$

显然 $Q^{(m)}(0) = 0 \quad (m=0, 2, \cdots, n-1),$

其中 $Q^{(0)}(x) = Q(x),$

但 $Q^{(n)}(0) = n! \neq 0.$

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} Q^{(m)}(x) = 0 \quad (m=0, 1, 2, \cdots, n).$

对函数 $Q(x)$ 和区间 $(0, +\infty)$ 应用 1237 题的结论, 得存在

$$x^{(1)} \in (0, +\infty),$$

使 $Q'(x^{(1)}) = 0.$

再对函数 $Q'(x)$ 和区间 $(0, x^{(1)})$ 及 $(x^{(1)}, +\infty)$ 应用 1237 题的结论, 知存在

$$x_1^{(2)} \in (0, x^{(1)}), x_2^{(2)} \in (x^{(1)}, +\infty).$$

使 $Q''(x_1^{(2)}) = Q''(x_2^{(2)}) = 0.$

这样继续下去, 反复应用 1237 题 n 次得在区间 $(0, +\infty)$ 内存在 n 个点 $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$, 使得

$$Q^{(n)}(x_i^{(n)}) = 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

所以 $L_n(x_i^{(n)}) = 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n),$

即 $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$ 都是 $L_n(x)$ 的根. 而

$$\begin{aligned} L_n(x) &= e^x \frac{d^n}{dx^n} Q(x) \\ &= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} C_n^1 n x^{n-1} + \cdots + n!, \end{aligned}$$

是 n 次多项式. 故 $L_n(x)$ 恰有 n 个根, 因此 $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$ 是 $L_n(x)$ 的全部根, 它们位于 $(0, +\infty)$ 内.

【1243】 证明: 切贝绍夫—埃尔米特多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}),$$

所有的根为实数.

证 设 $Q(x) = e^{-x^2}$. 我们用归纳法证明 $Q^{(n)}(x)$ 有 n 个相异

的实根.

易求 $Q'(x) = -2xe^{-x^2}$,

显然 $Q'(x)$ 有一个实根 $x = 0$.

设 $Q^{(k)}(x) = 0$ 有 k 个相异实根

$$x_1^{(k)} < x_2^{(k)} < \cdots < x_k^{(k)},$$

$Q^{(k)}(x)$ 是 e^{-x^2} 与一个 k 次多项式的乘积, 所以

$$Q^{(k)}(x) = Ae^{-x^2}(x - x_1^{(k)})(x - x_2^{(k)}) \cdots (x - x_k^{(k)}),$$

其中 $A \neq 0$ 是一个常数. 下面我们证明 $Q^{(k+1)}(x) = 0$ 有 $(k+1)$ 个相异实根. 事实上, 因为

$$Q^{(k)}(x_i^{(k)}) = Q^{(k)}(x_{i+1}^{(k)}) \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1),$$

由罗尔定理, 知存在

$$x_{i+1}^{(k+1)} \in (x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}),$$

使 $Q^{(k+1)}(x_{i+1}^{(k+1)}) = 0 \quad (i = 1, \cdots, n-1),$

又因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} Q^{(k)}(x) = 0,$

及 $Q^{(k)}(x_1^{(k)}) = 0.$

由 1237 题的结果, 知存在

$$x_1^{(k+1)} \in (-\infty, x_1^{(k)}),$$

使得 $Q^{(k+1)}(x_1^{(k+1)}) = 0.$

同理, 存在

$$x_{k+1}^{(k+1)} \in (x_k^{(k)}, +\infty),$$

使得 $Q^{(k+1)}(x_{k+1}^{(k+1)}) = 0,$

即 $Q^{(k+1)}(x) = 0$ 有 $(k+1)$ 个实根. 故由数学归纳法, 知对任何正整数 n , $Q^{(n)}(x) = 0$, 有 n 个相异实根. 从而 $H_n(x)$ 有 n 个相异实根. 而 $H_n(x)$ 为 n 次多项式. 因此, $H_n(x)$ 的根全为实根.

【1244】 在曲线 $y = x^3$ 上某点的切线平行于连接点 $A(-1, -1)$ 和点 $B(2, 8)$ 的弦, 求出这个点.

解 设所求点为 (x_0, y_0) , 由题意有

$$y'(x_0) = 3x_0^2 = \frac{8 - (-1)}{2 - (-1)} = 3,$$

解之得 $x_0 = -1,$

或 $x_0 = 1$.

故所求点为 $(-1, -1)$ 及 $(1, 1)$.

【1245】 如果 $ab < 0$, 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的有限增量公式在闭区间 $[a, b]$ 内是正确的吗?

解 不正确. 事实上, 如果有限增量公式在此区间成立, 则有 $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ $c \in (a, b)$,

$$\text{即 } \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{c^2}(b-a),$$

$$\text{即 } \frac{a-b}{ab} = \frac{1}{c^2}(a-b).$$

所以 $c^2 = ab < 0$ 矛盾.

因此, 有限增量公式对于函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[a, b]$ ($ab < 0$) 上不正确, 原因是 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不存在, 故有限增量公式的条件不满足.

【1246】 如果:

$$(1) f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0);$$

$$(2) f(x) = x^3;$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{x};$$

$$(4) f(x) = e^x.$$

求函数 $\theta = \theta(x, \Delta x)$, 使得

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x)$$

$$(0 < \theta < 1).$$

解 (1) $f'(x) = 2ax + b$.

$$\begin{aligned} \text{于是, 有 } a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - (ax^2 + bx + c) \\ = \Delta x [2a(x + \theta \Delta x) + b], \end{aligned}$$

$$\text{即 } 2ax\Delta x + a\Delta x^2 + b\Delta x = 2ax\Delta x + \theta \cdot 2a\Delta x^2 + b\Delta x,$$

$$\text{化简之得 } \theta = \frac{1}{2}.$$

(2) $f'(x) = 3x^2$. 于是有

$$(x + \Delta x)^3 - x^3 = \Delta x \cdot 3(x + \theta \Delta x)^2.$$

如果 $x = 0$, 则 $\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

如 $x \neq 0$, 则有 $3\theta^2 \Delta x + 6\theta x - (3x + \Delta x) = 0$.

所以 $\theta = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + x\Delta x + \frac{1}{3}(\Delta x)^2}}{\Delta x}$,

其中正负号的取法由 $x, \Delta x$ 的符号及条件 $0 < \theta < 1$ 决定.

(3) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. 于是有

$$\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{(x + \theta \Delta x)^2},$$

即 $\theta^2 \Delta x^2 + 2x\theta \cdot \Delta x - x\Delta x = 0$,

或 $\theta^2 + \frac{2x}{\Delta x} \cdot \theta - \frac{x}{\Delta x} = 0$.

所以 $\theta = -\frac{x}{\Delta x} \pm \sqrt{\frac{x^2}{\Delta x^2} + \frac{x}{\Delta x}}$,

其中正负号根据条件 $0 < \theta < 1$ 来确定.

(4) $f'(x) = e^x$. 于是有

$$e^{x+\Delta x} - e^x = \Delta x e^{x+\theta \Delta x}.$$

所以 $\theta = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$.

【1246. 1】 设

$$f(x) \in C^{(1)}(-\infty, +\infty),$$

且对于任何 x 和 h , 有恒等式

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'(x).$$

证明: $f(x) = ax + b$, 其中 a, b 为常数.

证 因为对任何 x 和 h 都有

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x),$$

特别地取 $x = 0$, 则对任何 h 都有

$$f(h) - f(0) = hf'(0).$$

因此 $f(x) = ax + b$.

其中 $a = f'(0), b = f(0)$.

【1246. 2】 设

$$f(x) \in C^{(2)}(-\infty, +\infty).$$

且对于任何 x 和 h , 有恒等式 $f(x+h) - f(x) \equiv hf'\left(x + \frac{h}{2}\right)$.

证明: $f(x) = ax^2 + bx + c$, 其中 a, b 和 c 为常数.

证 因为对于任意的 x 和 h 都有

$$f(x+h) - f(x) = hf'\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

在上式中将 x 看成常数, 对 h 求导数得

$$f'(x+h) = f'\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}f''\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

$$\text{即 } f'(x+h) - f'\left(x + \frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2}f''\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

特别地, 取 $x + \frac{h}{2} = 0$ 得

$$f'\left(\frac{h}{2}\right) - f'(0) = \frac{h}{2}f''(0),$$

由 h 的任意性, 得

$$f'(x) = 2ax + b,$$

其中 $f''(0) = 2a, f'(0) = b$.

令 $F(x) = f(x) - ax^2 - bx$,

则 $F'(x) = f'(x) - 2ax - b = 0$.

因此 $F(x) \equiv c = f(0)$,

故 $f(x) = ax^2 + bx + c$.

其中 a, b, c 为常数.

【1247】 证明: 如果 $x \geq 0$, 则

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

其中 $\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2}$, 并且 $\lim_{x \rightarrow +0} \theta(x) = \frac{1}{4}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

证 当 $x \geq 0$ 时, 对函数 \sqrt{x} 应用有限增量公式, 得

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

解之得 $\theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)} - x),$

当 $x=0$ 时, $\theta = \frac{1}{4}.$

当 $x>0$ 时, 有

$$0 \leq \sqrt{x(x+1)} - x = \frac{x}{\sqrt{x(x+1)} + x} < \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

所以 $\frac{1}{4} \leq \theta(x) < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$

并且 $\lim_{x \rightarrow +0} \theta(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)} - x) \right] = \frac{1}{4},$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)} - x) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{x}{2(\sqrt{x(x+1)} + x)} \right] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【1248】 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{当 } 1 < x < \infty. \end{cases}$$

在闭区间 $[0, 2]$ 上确定函数 $f(x)$ 有限增量公式的中间值 c .

解 $f'(x) = \begin{cases} -x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{当 } 1 < x < +\infty, \end{cases}$

且 $f'_-(0) = f'_+(0) = -1,$

所以, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可微, 在 $[0, 2]$ 上连续且

$$f(0) = \frac{3}{2}, f(2) = \frac{1}{2}.$$

据增量公式有

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -c(2-0),$$

或 $\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{c^2}(2-0).$

所以 $c = \frac{1}{2},$

或 $c = \sqrt{2} \quad (c = -\sqrt{2} \text{ 不合适, 舍去}).$

这就是所求的中间值.

【1249】 设 $f(x) - f(0) = xf'[\xi(x)],$

其中 $0 < \xi(x) < x.$

证明: 如果当 $x > 0$ 时, $f(x) = x \sin(\ln x), f(0) = 0$, 则函数 $\xi = \xi(x)$ 在无论怎么小的区间 $(0, \epsilon)$ (这里 $\epsilon > 0$) 内也是不连续的.

证 假设 $\xi(x)$ 在某区间 $(0, \epsilon)$ 内连续 ($\epsilon > 0$).

因为当 $x > 0$ 时,

$$f'(x) = \sin(\ln x) + \cos(\ln x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right).$$

故由 $f(x) - f(0) = xf'(\xi(x)),$

得 $x \sin(\ln x) = x \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \xi(x)\right).$

从而 $\sin(\ln x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \xi(x)\right) \quad (0 < x < +\infty),$

现取一个充分大的自然数 N , 使

$$-2N\pi + \frac{\pi}{4} < \ln \xi\left(\frac{\epsilon}{2}\right),$$

由 $0 < \xi(x) < x$ 知 $\lim_{x \rightarrow +0} \xi(x) = 0.$

从而 $\lim_{x \rightarrow +0} \ln \xi(x) = -\infty,$

因此, 可取 $0 < \delta < \frac{\epsilon}{2}$, 使 $\ln \xi(\delta) < -2N\pi + \frac{\pi}{4}.$

由于 $\ln \xi(x)$ 在 $\left[\delta, \frac{\epsilon}{2}\right]$ 上连续, 据连续函数的介值定理知, 存

在 $x_0 \in \left(\delta, \frac{\epsilon}{2}\right)$, 使

$$\ln \xi(x_0) = -2N\pi + \frac{\pi}{4},$$

于是 $1 \geq \sin(\ln x_0) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \xi(x_0)\right) = \sqrt{2}$.

矛盾. 因此 $\xi(x)$ 在任意小的区间 $(0, \epsilon)$ 内不连续.

【1250】 假设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有连续导数 $f'(x)$, 对于区间 (a, b) 内的任何一点 ξ , 能否从此区间指出另外的两点 x_1 和 x_2 , 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (x_1 < \xi < x_2).$$

研究: $f(x) = x^3$ ($-1 \leq x \leq 1$), 其中 $\xi = 0$.

解 不可以. 例如: 设

$$f(x) = x^3 \quad (-1 < x < 1).$$

对于 $\xi = 0$, 就找不到所需的 x_1 和 x_2 , 使

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(0) = 0 \quad (x_1 < 0 < x_2).$$

$$\begin{aligned} \text{事实上, } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 \\ &= x_2^2 + x_1^2 - |x_1| \cdot |x_2| \\ &> x_2^2 + x_1^2 - 2|x_1| \cdot |x_2| \\ &= (|x_2| - |x_1|)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

【1251】 证明下列不等式:

$$(1) |\sin x - \sin y| \leq |x - y|;$$

$$(2) p y^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq p x^{p-1}(x-y), \text{ 若 } 0 < y < x \text{ 且 } p > 1;$$

$$(3) |\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|;$$

$$(4) \frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, \text{ 若 } 0 < b < a.$$

证 (1) 根据拉格朗日定理, 有

$$|\sin x - \sin y| = |(x-y)\cos \xi| \leq |x-y|,$$

其中, ξ 位于 x, y 之间.

$$(2) x^p - y^p = p \xi^{p-1}(x-y),$$

其中 $0 < y < \xi < x$. 由于 $p > 1$, 所以

$$y^{p-1} < \xi^{p-1} < x^{p-1}.$$

因此 $py^{p-1}(x-y) < x^p - y^p < px^{p-1}(x-y)$.

$$(3) \quad |\arctan a - \arctan b| = \left| \frac{1}{1+\xi^2}(a-b) \right| \\ \leq |a-b|,$$

其中, ξ 位于 a, b 之间.

$$(4) \quad \ln a - \ln b = \frac{a-b}{\xi}$$

其中 $0 < b < \xi < a$, 于是

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

【1252】 解释在闭区间 $[-1, 1]$ 上, 为什么柯西定理对于函数 $f(x) = x^2$ 与 $g(x) = x^3$ 是不正确的?

解 因为当 $x = 0$ 时,

$$[f'(0)]^2 + [g'(0)]^2 = 0,$$

所以 $f(x), g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上不满足柯西定理的条件. 因此, 柯西定理的结论可以不成立. 事实上

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = 0,$$

$$\text{而} \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{2\xi}{3\xi^2} \neq 0 \quad \xi \in (-1, 1), \xi \neq 0$$

它们是不相等的.

【1253】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上可微分, 而且 $x_1 x_2 > 0$, 证明:

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

其中 $x_1 < \xi < x_2$.

证 设 $g(x) = \frac{1}{x}, F(x) = \frac{f(x)}{x}$.

由于 $x_1 x_2 > 0$, 故 $0 \notin [x_1, x_2]$, 从而 $g(x), F(x)$ 均在 $[x_1, x_2]$ 上可微, 且

$$[g'(x)]^2 + [F'(x)]^2 = \frac{1 + [xf'(x) - f(x)]^2}{x^4} \neq 0,$$

$$g(x_1) \neq g(x_2).$$

因此, $F(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足柯西定理的条件, 故至少存在一点 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} = \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)},$$

即
$$\frac{\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} = \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}.$$

整理得
$$\frac{1}{x_1 - x_2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

【1254】 证明: 如果函数 $f(x)$ 在有穷区间 (a, b) 内可微分, 但无界, 则其导数 $f'(x)$ 在区间 (a, b) 内也无界, 逆定理是不正确的(举例说明).

证 假设 $f'(x)$ 在 (a, b) 内有界, 即存在 $M > 0$, 使得

$$|f'(x)| < M \quad x \in (a, b).$$

取定 $c \in (a, b)$. 由有限增量公式知对任何 $x \in (a, b)$ 有

$$|f(x) - f(c)| = |x - c| |f'(\xi)| < M(b - a),$$

其中, ξ 位于 x 与 c 之间.

因此
$$|f(x)| \leq |f(c)| + |f(x) - f(c)| < f(c) + M(b - a),$$

即 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界, 这与假设相矛盾. 逆定理不真, 例如

$$f(x) = \sin \frac{1}{x},$$

在 $(0, 1)$ 内有界, 但 $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$,

却是无界的.

【1255】 证明: 如果函数 $f(x)$ 在有穷或无穷区间 (a, b) 内具有有界导数 $f'(x)$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内是一致连续的.

证 设 $|f'(x)| \leq M \quad x \in (a, b)$,

对于任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, 则当 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} \text{有 } |f(x_1) - f(x_2)| &= |x_1 - x_2| |f'(\xi)| \\ &\leq M |x_1 - x_2| < \varepsilon, \end{aligned}$$

其中, ξ 在 x_1 与 x_2 之间.

因此, $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

【1256】 证明: 如果函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(x_0, +\infty)$ 内可微分, 并且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, 亦即当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) = o(x)$.

证 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $R_1 > \max\{x_1, 0\}$,

使当 $x > R_1$ 时, 恒有 $|f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

由有限增量公式, 当 $x > R_1$ 时有

$$\begin{aligned} |f(x) - f(R_1)| &= |x - R_1| \cdot |f'(\xi)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} (x - R_1), \end{aligned}$$

其中 $R_1 < \xi < x$.

从而 $|f(x)| \leq f(R_1) + \frac{\varepsilon}{2} |x - R_1|$.

取 $R_2 > R_1$, 使 $\frac{|f(R_1)|}{R_2} < \frac{\varepsilon}{2}$, 则当 $x > R_2$ 时

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{x} \right| &\leq \left| \frac{f(R_1)}{x} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{x - R_1}{x} \right| \\ &< \frac{|f(R_1)|}{R_2} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

【1257】 证明: 如果函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(x_0, +\infty)$ 内可微分, 并且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) = o(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0$, 特别是, 如果存在: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = k$, 则 $k = 0$.

证 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, 所以, 对于任意常数 a , 有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \left(1 + \frac{a}{x - a} \right) - \frac{f(a)}{x - a} \right] = 0. \end{aligned}$$

于是, 对 $a_n = \max\{n, x_0 + 1\}$ ($n = 1, 2, \dots$), 总存在 $b_n > a_n$, 使得

$$\left| \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \right| < \frac{1}{n}.$$

由拉格朗日定理知, 存在 $c_n: a_n < c_n < b_n$, 使得

$$f'(c_n) = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n},$$

因此 $|f'(c_n)| < \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$),

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f'(c_n)| = 0$.

由于 $c_n \geq a_n > n$,

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$,

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0$.

特别地, 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = k$,

则 $|k| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0$.

因此 $k = 0$.

【1258】 (1) 证明: 如果:

① 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_0, X]$ 上有定义且是连续的;

② $f(x)$ 在区间 (x_0, X) 内有有限导数 $f'(x)$;

③ 存在有限或无限极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = f'(x_0 + 0),$$

则存在相应的有穷或无穷单边导数 $f'_+(x_0)$ 且

$$f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0).$$

(2) 证明: 函数

$$f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1) \text{ 及 } f(1) = 0,$$

存在有限极限 $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$, 但函数 $f(x)$ 没有单边导数 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$.

(1). 给出这个事实的几何解释.

但是在这一点存在广义的单边导数(参习题 1009. 1).

证 (1) 由有限增量公式, 有

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta \Delta x)$$

$$(\Delta x > 0, 0 < \theta < 1).$$

当 $\Delta x \rightarrow +0$ 时 $x_0 + \theta \Delta x \rightarrow x_0 + 0$.

由假设条件知

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} f'(x_0 + \theta \Delta x) = f'(x_0 + 0).$$

所以 $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + 0),$

即 $f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0).$

(2) 当 $x \neq 1$ 时,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

于是 $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2},$

但 $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arctan \frac{1+x}{1-x}}{x-1} = -\infty,$

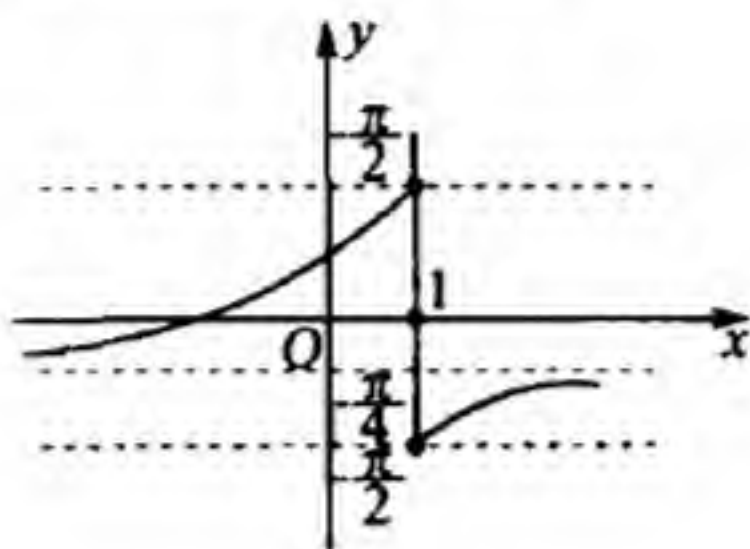
$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\arctan \frac{1+x}{1-x}}{x-1} = -\infty.$$

所以 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$ 均不存在.

因为 $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \frac{\pi}{2},$

即 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的第一类不连续点. 函数在这点产生了跳跃. 所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处无导数.

$y = f(x)$ 的图形如 1258 题图所示



1258 题图

【1259】 证明: 当 $a < x < b$ 时, 如果 $f'(x) = 0$, 则当 $a < x < b$ 时, $f(x) = \text{常数}$.

证 取点 $x_0 \in (a, b)$, 则当 $x \in (a, b)$ 时, 由有限增量公式可得 $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$,

其中 c 位于 x_0 与 x 之间. 由于 $f'(c) = 0$.

故 $f(x) - f(x_0) = 0$,

即 $f(x) = f(x_0) = \text{常数}$.

【1260】 证明: 导数为常数 $f'(x) = k$ 的唯一函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是线性函数 $f(x) = kx + b$.

证 因为 $(f(x) - kx)' = f'(x) - k = 0$.

于是 $f(x) - kx \equiv b$ (常数),

故 $f(x) = kx + b$ (线性函数).

【1261】 如果 $f^{(n)}(x) = 0$, 函数 $f(x)$ 能有什么性质?

解 $f(x)$ 为次数不超过 n 的多项式, 事实上, 当 $f'(x) = 0$ 时, 由 1260 题结果知 $f(x) = kx + b$ 即当 $n = 1$ 时, 命题成立.

假设当 $n = k$ 时, 命题成立, 下面证明当 $n = k + 1$ 时, 命题成立. 即 $f^{(k+1)}(x) = 0$.

由归纳假设知 $f'(x)$ 为次数不超过 k 的多项式, 设

$$f'(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_0,$$

其中 a_0, \dots, a_k 为常数, 设

$$F(x) = f(x) - \left(\frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \frac{a_{k-1}}{k} x^k + \dots + a_0 x \right).$$

则 $F'(x) = f'(x) - (a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0) = 0$.

因此 $F(x) = C$ (常数),

即 $f(x) = \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \frac{a_{k-1}}{k} x^k + \dots + a_0 x + C$.

因此, 由数学归纳法知, 命题对任何自然数均成立.

【1261. 1】 设 $f(x) \in C^{(\infty)}(-\infty, +\infty)$, 且对于每个 x 存在自然数 $n_x (n_x \leq n)$, 以致 $f^{(n_x)}(x) = 0$. 证明函数 $f(x)$ 是多项式.

证 对于任意的 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 一定存在 $0 \leq l \leq n$, 及数列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$,

及 $f^{(l)}(x_k) = 0$.

事实上, 取 $x_k = x_0 + \frac{1}{k}$, 由假设知, 存在 $n_{x_k} (n_{x_k} \leq n)$ 使

$$f^{(n_{x_k})}(x_k) = 0.$$

由于 $n_{x_k} \leq n$, 故存在 $l (l \leq n)$ 及一子列 $\{x_{k_i}\}$ 使得 $n_{x_{k_i}} = l$. 不妨仍以 $\{x_k\}$ 记此子序列, 故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0, f^{(l)}(x_k) = 0.$$

由 $f^{(l)}(x)$ 的连续性, 知

$$f^{(l)}(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(l)}(x_k) = 0.$$

由于 $f^{(l)}(x_0) = f^{(l)}(x_k) = 0$,

由罗尔定理知, 存在 $x_k^{(1)} \in (x_0, x_k)$, 使得

$$f^{(l+1)}(x_k^{(1)}) = 0.$$

由于 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(1)} = x_0$,

再由 $f^{(l+1)}(x)$ 的连续性有

$$f^{(l+1)}(x_0) = 0,$$

依此类推, 我们可得对任何大于等于 l 的自然数 m , 都有

$$f^{(m)}(x_0) = 0,$$

特别地, $f^{(n)}(x_0) = 0$, 由 x_0 的任意性, 有

$$f^{(n)}(x) = 0 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

由 1261 题的结论有, $f(x)$ 为次数不超过 n 的多项式.

【1262】 证明: 满足方程 $y' = \lambda y$ ($\lambda =$ 常数) 的唯一函数 $y = y(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是指数函数: $y = ce^{\lambda x}$. 其中 c 为任意常数.

提示: 研究 $(ye^{-\lambda x})'$.

证 设 $y = y(x)$ 是满足方程的函数, 令

$$F(x) = ye^{-\lambda x},$$

则 $F'(x) = y'e^{-\lambda x} - \lambda ye^{-\lambda x} = (y' - \lambda y)e^{-\lambda x} = 0,$

因此 $F(x) = C$ (C 为常数),

即 $y = Ce^{\lambda x}.$

【1263】 检验函数

$$f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x},$$

及 $g(x) = \arctan x,$

在 (1) $x < 1$ 及 (2) $x > 1$ 的范围内具有相同的导数.

推导这些函数之间的关系.

解 当 $x < 1$ 或 $x > 1$ 时,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

故 $f'(x) = g'(x) \quad (x > 1 \text{ 或 } x < 1).$

因此 $f(x) - g(x) = C_1$, 当 $x < 1$ 时.

$f(x) - g(x) = C_2$, 当 $x > 1$ 时.

下面确定 C_1 及 C_2 .

$$C_1 = f(0) - g(0) = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arctan \frac{1+x}{1-x} - \arctan x \right) \\
 &= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

因此 $\arctan \frac{1+x}{1-x} = \arctan x + \frac{\pi}{4} \quad (x < 1),$

$$\arctan \frac{1+x}{1-x} = \arctan x - \frac{3\pi}{4} \quad (x > 1).$$

【1264】 证明以下恒等式:

$$(1) \quad 2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x, \quad \text{当 } |x| \geq 1;$$

$$(2) \quad 3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi, \quad \text{当 } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

证 (1) 当 $|x| > 1$ 时,

$$\begin{aligned}
 &\left(2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \right)' \\
 &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

故 $2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = C_1 \quad (\text{当 } x > 1 \text{ 时}),$

$$2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = C_2 \quad (\text{当 } x < -1 \text{ 时}).$$

所以 $C_1 = 2\arctan \sqrt{3} + \arcsin \frac{2\sqrt{3}}{4} = \pi,$

$$C_2 = 2\arctan(-\sqrt{3}) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\pi.$$

故当 $|x| > 1$ 时,

$$2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x.$$

当 $|x| = 1$ 时, 上式显然成立.

因此, 当 $|x| \geq 1$ 时,

$$2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x.$$

(2) 当 $|x| < \frac{1}{2}$ 时,

$$\begin{aligned} & [3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3)]' \\ &= -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}} \cdot (3-12x^2) \\ &= -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)^2}} \cdot 3(1-4x^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

故 $3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = C$

$$\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right).$$

将 $x = 0$ 代入上式得 $C = 3\arccos 0 - \arccos 0 = \pi$,

当 $x = \pm \frac{1}{2}$ 时, 显然有 $3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$.

因此, 当 $|x| \leq \frac{1}{2}$ 时 $3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$.

【1265】 证明: 如果

- (1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上是连续的;
- (2) 在此区间内具有有穷导数 $f'(x)$;
- (3) 不是线性函数;

则在区间 (a, b) 内至少能找到一个点 c , 使得

$$|f'(c)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

给出这一事实的几何解释.

证 当 $a \leq x \leq b$ 时,

$$\text{设 } F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

则 $F(a) = F(b) = 0$.

且当 $a < x < b$ 时, $F(x) \neq 0$ ($f(x)$ 为非线性函数). 设在 c_1 点 ($a < c_1 < b$), $F(c_1) \neq 0$, 不妨设 $F(c_1) > 0$, 在区间 $[a, c_1]$ 及 $[c_1, b]$ 上分别应用拉格朗日定理, 存在 $z_1 \in (a, c_1)$ 使

$$F'(z_1) = \frac{F(c_1) - F(a)}{c_1 - a} = \frac{F(c_1)}{c_1 - a} > 0.$$

$z_2 \in (c_1, b)$, 使

$$F'(z_2) = \frac{F(b) - F(c_1)}{b - c_1} = \frac{-F(c_1)}{b - c_1} < 0.$$

而 $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

所以 $f'(z_1) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$,

$$f'(z_2) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

因此, 当 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0$ 时 $|f'(z_1)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|$;

当 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$ 时,

$$|f'(z_2)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

于是, 命题得证.

这个事实的几何意义是: 对于一条非直线的连续曲线段, 如果曲线段上每点都存在不垂直于 Ox 轴的切线, 则在曲线上至少存在一点 C , 使得在该点曲线的切线斜率的绝对值大于连结该曲线段两个端点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 的弦的斜率的绝对值. 亦即, 该切线比弦更陡.

【1266】 证明: 如果

(1) 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有二阶导数 $f''(x)$;

(2) $f'(a) = f'(b) = 0$;

则在区间 (a, b) 内至少存在一个点 c , 使得

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

证 令 $M = \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$.

反设 $|f''(x)| < M \quad (a < x < b)$,

取 x_0 为 $[a, b]$ 中任意固定点, 作函数

$$F(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)],$$

$$G(x) = (x - x_0).$$

不妨设 $x > x_0$, 那么有

$$F(x_0) = G(x_0) = 0,$$

$$F'(x) = f'(x) - f'(x_0),$$

$$G'(x) = 2(x - x_0),$$

$$F'(x_0) = G'(x_0) = 0.$$

且 $F''(x) = f''(x),$

$$G''(x) = 2.$$

在 $[x_0, x]$ 上, $F(x)$ 与 $G(x)$, 及 $F'(x)$ 与 $G'(x)$ 满足柯西定理的条件, 对 $F(x)$ 与 $G(x)$ 及 $F'(x)$ 与 $G'(x)$ 应用柯西定理, 得

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{G(x)} &= \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \\ &= \frac{F'(c) - F'(x_0)}{G'(c) - G'(x_0)} = \frac{F''(\xi)}{G''(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{2}. \end{aligned}$$

其中 $c \in (x_0, x)$, $\xi \in (x_0, c)$, 从而 $\xi \in (x_0, x)$, 当 $x < x_0$, 类似地讨论, 我们有相同的结论, 所以

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2. \quad ①$$

其中 ξ 是位 x_0 与 x 之间的点. 特别地, 在 ① 中取

$$x_0 = a, x = \frac{a+b}{2},$$

并注意到 $f'(a) = 0$, 有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{(b-a)^2}{8}f''(c_1), \quad ②$$

其中 $a < c_1 < \frac{a+b}{2}$,

再令 $x_0 = b, x = \frac{a+b}{2}$,

$$\text{得} \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c_2), \quad (3)$$

$$\text{其中} \quad \frac{a+b}{2} < c_2 < b.$$

由②及③式得

$$\begin{aligned} & |f(b) - f(a)| \\ &= \left| \frac{(b-a)^2}{8} (f''(c_2) - f''(c_1)) \right| \\ &\leq \frac{(b-a)^2}{8} (|f''(c_2)| + |f''(c_1)|) < \frac{(b-a)^2}{4} M \\ &= \frac{(b-a)^2}{4} \cdot \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)| \\ &= |f(b) - f(a)|. \end{aligned}$$

矛盾!因此,在 (a, b) 至少存在一点 c ,使

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

【1267】 汽车从某个起点站开始行驶,在 t 秒钟内跑完了全程,在此时间内经过的距离为 s 米.证明:汽车运动的加速度的绝对值在某个瞬间不小于 $\frac{4s}{t^2}$ 米/秒².

证 设 $s = f(t)$.

则加速度为 $a(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} = f''(t)$,

则1266题的结果知,在 $(0, t)$ 内至少存在一点 t_1 ,使得

$$|a(t_1)| = |f''(t_1)| \geq \frac{4 |f(t) - f(0)|}{|t - 0|^2} = \frac{4s}{t^2}.$$

§ 7. 函数的递增、递减. 不等式

1. 函数的递增和递减 如果当 $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ 时, $f(x_2) > f(x_1)$ (或者对应地当 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ 时, $f(x_2) < f(x_1)$), 则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 是递增(或递减)函数.

如果可微分函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 递增(或递减), 则当 $a \leq x \leq b$ 时 $f'(x) \geq 0$, (或者当 $a \leq x \leq b$ 时, $f'(x) \leq 0$).

2. 函数递增(或递减)的充分条件 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上是连续的, 并且在区内有正(或负)导数 $f'(x)$, 则函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上递增(或递减).

确定下列函数在严格意义上的单调(递增或递减)区间(1268 ~ 1178).

【1268】 $y = 2 + x - x^2$.

解 $y' = 1 - 2x$.

当 $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

【1269】 $y = 3x - x^3$.

解 $y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$.

当 $-\infty < x < -1$ 时, $y' < 0$, 函数减小;

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

【1270】 $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

解 $y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

当 $-\infty < x < -1$ 时, $y' < 0$, 函数减小;

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

【1271】 $y = \frac{\sqrt{x}}{x+100} \quad (x \geq 0)$.

解 $y' = \frac{-x+100}{2\sqrt{x}(x+100)^2}$.

当 $0 < x < 100$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $100 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

【1272】 $y = x + \sin x$.

解 $y' = 1 + \cos x \geq 0$, 且 y' 只在孤立点

$$x = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots).$$

为零. 故函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内增大.

【1273】 $y = x + |\sin 2x|.$

解 $y' = 1 + 2 \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} \cdot \cos 2x$

$$\left(x \neq \frac{k\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right),$$

因此, 当 $1 + 2\cos 2x > 0$ 且 $\sin 2x > 0$

或 $1 - 2\cos 2x > 0$ 且 $\sin 2x < 0$ 时,

$y' > 0$. 所以

当 $x \in \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ 时, $y' > 0$, 函数增大.

当 $x \in \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

【1274】 $y = \cos \frac{\pi}{x}.$

解 $y' = \frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}$

当 $2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi$ 及 $-(2k+2)\pi < \frac{\pi}{x} < -(2k+1)\pi$ (k

$= 1, 2, \dots$) 及 $0 < \frac{\pi}{x} < \pi$ 时, 亦即 $x > 1, x \in \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)$ 及 x

$\in \left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k+2}\right)$ 时, $y' > 0$, 函数增大 ($k = 1, 2, \dots$).

同样, 当 $x \in \left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right)$ 及 $x \in \left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1}\right)$ 时, $y' < 0$, 函数减小 ($k = 1, 2, \dots$).

【1275】 $y = \frac{x^2}{2^x}.$

解 $y' = \frac{2x - x^2 \ln 2}{2^x} = \frac{x(2 - x \ln 2)}{2^x}.$

当 $-\infty < x < 0$ 及 $\frac{2}{\ln 2} < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

当 $0 < x < \frac{2}{\ln 2}$ 时, $y' > 0$, 函数增大.

【1276】 $y = x^n e^{-x} \quad (n > 0, x \geq 0).$

解 $y' = x^{n-1} e^{-x} (n - x).$

当 $x \in (0, n)$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $x \in (n, +\infty)$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

【1277】 $y = x^2 - \ln x^2.$

解 $y' = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}.$

当 $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ 时, $y' < 0$, 函数减小;

当 $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ 时, $y' > 0$, 函数增大.

【1278】 若 $x > 0, f(x) = x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x\right)$, 及 $f(0) = 0.$

解 $f'(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x + x(\cos \ln x) \cdot \frac{1}{x}$
 $= \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right) \quad (x > 0).$

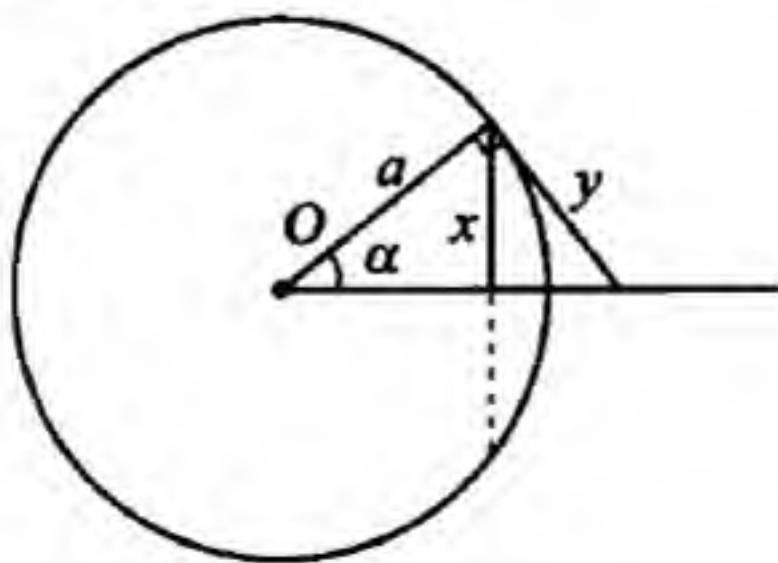
令 $f'(x) = 0$, 即 $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

解之得 $x = e^{2k\pi + \frac{13}{12}\pi}, \quad x = e^{2k\pi - \frac{7}{12}\pi} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

当 $x \in (e^{2k\pi - \frac{7}{12}\pi}, e^{2k\pi + \frac{13}{12}\pi})$ 时, $f'(x) > 0$, 函数增加. 当 $x \in (e^{2k\pi + \frac{13}{12}\pi}, e^{2k\pi + \frac{17}{12}\pi})$ 时, $f'(x) < 0$, 函数减小. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$

【1279】 证明: 内接于圆的正 n 边形, 当边的数目 n 增加时, 其周长 p_n 递增, 而外切于此圆的正 n 边形的周长 P_n 则递减. 利用这一点证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, p_n 和 P_n 有相同的极限.

证 如 1279 题图所示, 我们有



1279 题图

$$p_n = 2nx = 2na \sin \alpha = 2na \cdot \sin \frac{\pi}{n},$$

$$P_n = 2ny = 2na \cdot \tan \alpha = 2na \cdot \tan \frac{\pi}{n}.$$

设 $f(x) = \frac{2a}{x} \cdot \sin \pi x,$

则 $f'(x) = 2a \frac{\pi x \cos \pi x - \sin \pi x}{x^2}.$

考虑函数 $h(t) = t \cos t - \sin t, h'(t) = -t \sin t.$

当 $t \in (0, \pi)$ 时, $h'(t) < 0, h(t)$ 减小, 故

$$h(t) < h(0) = 0, t \in (0, \pi).$$

从而, 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 所以, 在 $(0, 1)$ 内, $f(x)$ 单调减,

故当 n 增大时, $p_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ 逐渐增大, 令

$$g(x) = \frac{2a}{x} \tan \pi x,$$

则 $g'(x) = 2a \frac{\pi x - \sin \pi x \cos \pi x}{x^2 \cos^2 \pi x}.$

显然, 当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 是增函数.

当 x 变小时, $g(x)$ 逐渐减小, 故 $P_n = g\left(\frac{1}{n}\right)$, 当 n 增大时, 逐渐变小. 所以,

$$p_n < p_{n+1}, P_{n+1} < P_n.$$

显然有 $p_{n+1} < P_{n+1}$, 于是有

$$p_3 < p_n < p_{n+1} < P_{n+1} < P_n < P_3,$$

故 $\{p_n\}$ 是单调增的有界数列, $\{P_n\}$ 是单调减的有界数. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$, 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ 均存在. 事实上,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2na \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 2a\pi,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2na \cdot \tan \frac{\pi}{n} = 2a\pi.$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n.$$

【1280】 证明: 函数 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 与 $(0, +\infty)$ 内递增.

证 设 $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$,

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right].$$

当 $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ 时, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > 0$, 我们只需考

虑, $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$ 的正负性. 设

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x},$$

则 $g'(x) = -\frac{1}{x(1+x)^2}$.

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调增大, 而

$$g(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0.$$

所以, 当 $-\infty < x < -1$ 时, $g(x) > 0$. 而当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调减小, 而

$$g(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

所以, 当 $0 < x < +\infty$ 时, $g(x) > 0$. 因此, 当 $x \in (-\infty, -1) \cup$

$(0, +\infty)$ 时, $y' > 0$, $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 是增大的.

【1281】 证明: 有理整函数

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

在区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 内是单调的 (在严格意义上讲!). 其中 x_0 是足够大的正数.

证 $P'(x)$

$$= a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$$

$$= na_nx^{n-1} \left(1 + \frac{(n-1)a_{n-1}}{na_nx} + \cdots + \frac{a_1}{na_nx^{n-1}} \right).$$

而 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(n-1)a_{n-1}}{na_n x} + \cdots + \frac{a_1}{na_n x^{n-1}} \right) = 0,$

故存在 $x_0 > 0$, 使得当 $|x| > x_0$ 时,

$$\left| \frac{(n-1)a_{n-1}}{na_n x} + \cdots + \frac{a_1}{na_n x^{n-1}} \right| < \frac{1}{2},$$

从而 $1 + \frac{(n-1)a_{n-1}}{na_n x} + \cdots + \frac{a_1}{na_n x^{n-1}} > \frac{1}{2} > 0.$

故当 $-\infty < x < -x_0$ 或 $x_0 < x < +\infty$ 时, $P'(x)$ 的符号与 $na_n x^{n-1}$ 的符号相同, 即 $P'(x)$ 在区间 $(-\infty, -x_0)$ 或 $(x_0, +\infty)$ 内保持定号. 因此, $P(x)$ 在 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 内都是严格单调的.

【1282】 证明: 有理函数

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m} \quad (a_n b_m \neq 0).$$

若不恒等于常数, 则在区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 内是单调的 (在严格意义上讲!). 其中 x_0 是足够大的正数.

证 我们讨论两种情况,

情况 I: $n \neq m$,

$$\begin{aligned} R'(x) &= \frac{1}{(b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)^2} \\ &\quad \{ [a_1 + 2a_2 x + \cdots + na_n x^{n-1}] [b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m] \\ &\quad - [b_1 + 2b_2 x + \cdots + mb_m x^{m-1}] [a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n] \} \\ &= \frac{(n-m)a_n b_m x^{n+m-1}}{(b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)^2} \left[1 + \frac{(n-m+1)a_n b_{m-1} - (n-m-1)b_m a_{n-1}}{(n-m)a_n b_m x} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{(n-m)a_n b_m x^{n+m-1}} \right]. \end{aligned}$$

类似于 1281 题的讨论知, 存在 $x_0 > 0$, 使得当 $|x| > x_0$ 时

$$\begin{aligned} &1 + \frac{(n-m+1)a_n b_{m-1} - (n-m-1)b_m a_{n-1}}{(n-m)a_n b_m x} \\ &+ \cdots + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{(n-m)a_n b_m x^{n+m-1}} > 0. \end{aligned}$$

即 $R'(x)$ 与 $(n-m)a_n b_m x^{n+m-1}$ 有相同的符号. 因此, $R'(x)$ 在 $(-\infty, -x_0)$ 或 $(x_0, +\infty)$ 内保持定号. 故 $R(x)$ 在 $(-\infty, -x_0)$

及 $(x_0, +\infty)$ 中都是严格单调的.

情况 II: $m = n$, 此时

$$R(x) = \frac{a_n}{b_m} + \frac{c_k x^k + \cdots + c_1 x + c_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0},$$

其中 $k < m, c_k \neq 0$.

由情况 I 的证明知, 存在 $x_0 > 0$, 使得

$$g(x) = \frac{c_k x^k + \cdots + c_1 x + c_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0},$$

在 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 内都是严格单调的, 因此 $R(x)$ 在 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 内都是严格单调的. 证毕.

【1283】 单调函数的导数一定是单调的吗? 研究例子:

$$f(x) = x + \sin x.$$

解 不, 例如函数 $f(x) = x + \sin x$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调 (见 1272 题), 但 $f'(x) = 1 + \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内却不是单调的.

【1284】 证明: 如果 $\varphi(x)$ 是单调递增的可微分函数且

$$|f'(x)| \leq \varphi'(x) \quad (\text{当 } x \geq x_0),$$

$$\text{则} \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varphi(x) - \varphi(x_0) \quad (\text{当 } x \geq x_0),$$

对这一事实给出几何解释.

证 法一: 作函数

$$\psi(x) = \varphi(x) - f(x).$$

由拉格朗日定理知

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \psi'(\xi)(x - x_0) \quad x_0 < \xi < x.$$

由 $|f'(x)| \leq \varphi'(x)$ 知

$$\psi'(\xi) = \varphi'(\xi) - f'(\xi) \geq 0.$$

从而 $\psi(x) - \psi(x_0) \geq 0 \quad (x \geq x_0),$

所以 $\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq f(x) - f(x_0).$

再令 $\psi_1(x) = \varphi(x) + f(x),$

同样可得 $\psi_1(x) - \psi_1(x_0) \geq 0 \quad (x \geq x_0).$

所以 $\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq -(f(x) - f(x_0))$,

因此 $\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq |f(x) - f(x_0)|$.

法二:反设存在一点 $b > x_0$,使得

$$|f(b) - f(x_0)| > \varphi(b) - \varphi(x_0).$$

设 $F(x) = f(x) - f(x_0)$

$$- \frac{f(b) - f(x_0)}{\varphi(b) - \varphi(x_0)} [\varphi(x) - \varphi(x_0)],$$

则 $F(x_0) = F(b) = 0$.

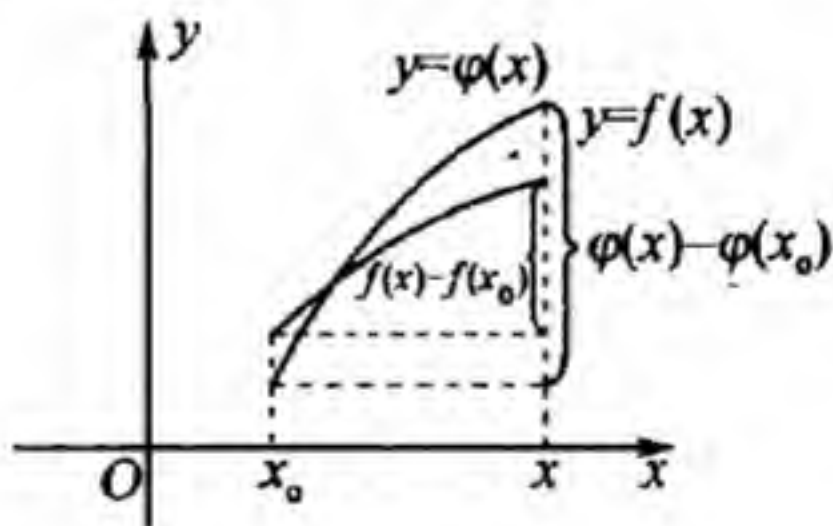
由罗尔定理知,存在点 $c \in (x_0, b)$,使 $F'(c) = 0$,即

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(x_0)}{\varphi(b) - \varphi(x_0)} \varphi'(c) = 0.$$

所以 $|f'(c)| = \frac{|f(b) - f(x_0)|}{\varphi(b) - \varphi(x_0)} \varphi'(c) > \varphi'(c)$,

这与题设相矛盾.因此 $|f'(x)| \leq \varphi'(x)$, $(x \geq x_0)$.

其几何意义是:若一单调上升的曲线各点的切线都比另一曲线上对应点的切线“陡”,则此曲线上每一条弦必比另一曲线上对应的弦“陡”.如 1284 题图所示.



1284 题图

【1285】 假设函数 $f(x)$ 在区间 $a \leq x < +\infty$ 内是连续的,且当 $x > a$ 时 $f'(x) > k > 0$, 其中 k 为常数.

证明:如果 $f(a) < 0$,则在区间 $(a, a - \frac{f(a)}{k})$ 内方程 $f(x) = 0$,有一个而且仅有一个实根.

证 由有限增量公式有

$$\begin{aligned} & f\left(a - \frac{f(a)}{k}\right) - f(a) \\ &= -\frac{f(a)}{k} \cdot f'(\xi) > -\frac{f(a)}{k} \cdot k = -f(a), \end{aligned}$$

其中 $a < \xi < a - \frac{f(a)}{k}$.

所以 $f\left(a - \frac{f(a)}{k}\right) > 0$,

又 $f(a) < 0$,

故根据连续函数的介值定理知:至少存在一点 $c \in \left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$, 使得 $f(c) = 0$, 又当 $x > a$ 时, $f'(x) > 0$. 故, $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内严格单调上升. 因此, 方程 $f(x) = 0$ 在 $\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$ 内恰有一个实根.

【1286】 如果在某个邻域 $|x - x_0| < \delta$ 内, 函数增量

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0),$$

的符号与自变数增量 $\Delta x_0 = x - x_0$ 的符号相同, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 递增.

证明: 如果函数 $f(x)$ ($a < x < b$) 在某个有穷或无穷区间 (a, b) 的每个点递增, 则它在该区间内是递增函数.

证 设 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 且 $x_1 < x_2$, 我们要证明 $f(x_1) < f(x_2)$. 对于 $[x_1, x_2]$ 中每一点 c , 由假设都存在开邻域 $\Delta_c = (c - \delta_c, c + \delta_c)$ 使得当 $x \in \Delta_c$ 时, $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$.

于是 $\bigcup_{c \in [x_1, x_2]} \Delta_c \supset [x_1, x_2]$, 由波内尔有限复盖定理, 从 $\{\Delta_c\}$ 中可选取有限个开区间复盖 $[x_1, x_2]$, 设为 $\Delta_{c_1}, \Delta_{c_2}, \dots, \Delta_{c_m}$.

不妨设 $x_1 < c_1 < c_2 < \dots < c_m < x_2$. 而可设诸 Δ_{c_i} 互不包含. (因为若 $\Delta_{c_i} \subset \Delta_{c_j}$, 内可将 Δ_{c_i} 舍去) 于是, 必有 $x_1 \in \Delta_{c_1}$. 因为若 $x_1 \notin \Delta_{c_1}$, 则存在 $j > 1$, 使得 $x_1 \in \Delta_{c_j}$, 则显然有 $\Delta_{c_1} \subset \Delta_{c_j}$, 矛盾.

另外, $\Delta_{c_i} \cap \Delta_{c_{i+1}} \neq \emptyset$. 事实上, 若 $\Delta_{c_i} \cap \Delta_{c_{i+1}} = \emptyset$, 则 $c_i + \delta_{c_i}$

必属于某 $\Delta c_j, j \neq i, j \neq i+1$. 若 $j < i$, 则 $\Delta c_i \subset \Delta c_j$, 矛盾. 若 $j > i+1$, 则 $\Delta c_{i+1} \subset \Delta c_j$, 也矛盾. 所以, 我们可取 $\bar{x}_i \in \Delta c_i \cap \Delta c_{i+1}$ 使得 $c_i < \bar{x}_i < c_{i+1}$.

于是 $f(c_i) < f(\bar{x}_i) < f(c_{i+1})$.

同理 $x_2 \in \Delta c_m$.

因此, 我们有

$$f(x_1) < f(c_1) < f(c_2) < \cdots < f(c_m) < f(x_2),$$

即 $f(x)$ 在 (a, b) 内是增函数.

【1287】 若 $x \neq 0$ 时, $f(x) = x + x^2 \sin \frac{2}{x}$, 及 $f(0) = 0$, 证明: $f(x)$ 在点 $x = 0$ 递增, 但在围绕这个点的任何区间 $(-\epsilon, \epsilon)$ 内, 并非递增, 其中 $\epsilon > 0$ 是任意小的数.

绘制此函数的略图.

证 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = 1 + 2x \sin \frac{2}{x} - 2 \cos \frac{2}{x},$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + \Delta x^2 \sin \frac{2}{\Delta x}}{\Delta x} = 1 > 0, \end{aligned}$$

所以, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处增大. 设

$$x_k = \frac{1}{k\pi} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

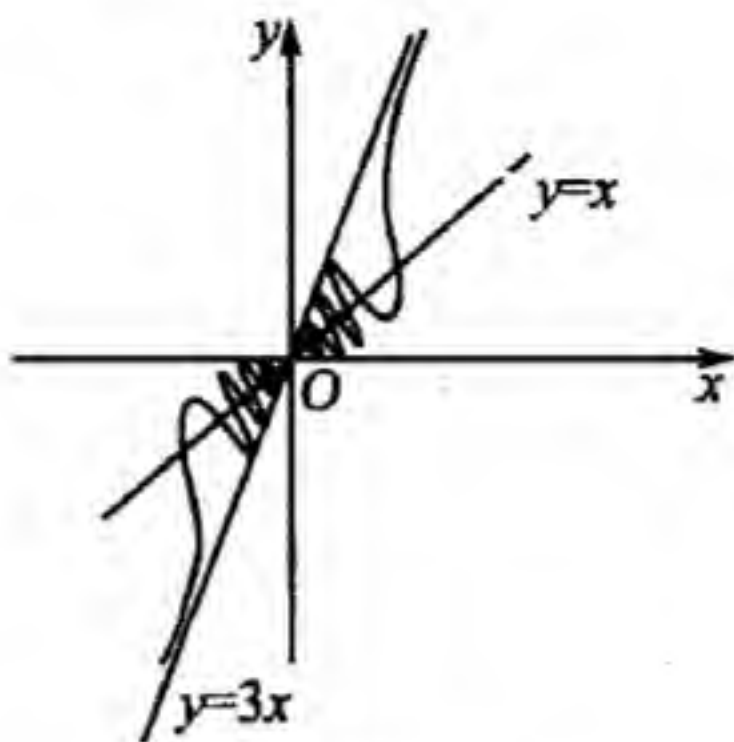
$$y_k = \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

则

$$f'(x_k) = -1 < 0, f'(y_k) = 3 > 0.$$

因此, 在 x_k 与 y_k 之间, $f(x)$ 由单调减小变到单调增大. 由于 $x_k \rightarrow 0, y_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 故 $f(x)$ 在 $(-\epsilon, \epsilon)$ 内不是增大的, 作无穷多次

振荡, 如 1287 题图所示.



1287 题图

【1288】 证明定理: 如果

- (1) 函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 可微分 n 次;
 - (2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$;
 - (3) 当 $x > x_0$ 时, $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$,
- 则当 $x > x_0$ 时, 不等式 $\varphi(x) > \psi(x)$ 成立.

证 设

$$F(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

则

$$F^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(x) > 0 \quad (x > x_0).$$

且

$$F^{(k)}(x_0) = \varphi^{(k)}(x_0) - \psi^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

因此 $F^{(n-1)}(x)$ 当 $x > x_0$ 时是严格增大的, 故

$$F^{(n-1)}(x) > F^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (x > x_0).$$

由此知 $F^{(n-2)}(x)$ 在 $x > x_0$ 时是严格增加的, 故

$$F^{(n-2)}(x) > F^{(n-2)}(x_0) = 0 \quad (x > x_0).$$

依此类推, 可得

$$F(x) > F(x_0) = 0 \quad (x > x_0),$$

即

$$\varphi(x) > \psi(x) \quad (x > x_0).$$

【1289】 证明以下不等式:

$$(1) e^x > 1+x \quad (\text{当 } x \neq 0 \text{ 时});$$

$$(2) x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x \quad (\text{当 } x > 0 \text{ 时});$$

$$(3) x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad (\text{当 } x > 0 \text{ 时});$$

$$(4) \tan x > x + \frac{x^3}{3} \quad (\text{当 } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ 时});$$

$$(5) (x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \quad (\text{当 } x > 0, y > 0, \text{ 且 } 0 < \alpha < \beta \text{ 时}).$$

请作出不等式(1)~(4)的几何解释.

证 (1) 设 $f(x) = e^x - 1 - x$,

则 $f'(x) = e^x - 1$,

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以, 在 $(0, +\infty)$ 内, $f(x)$ 单调增大. 故

$$f(x) > f(0) = 0 \quad (x > 0),$$

即 $e^x > 1+x \quad (x > 0)$.

当 $x < 0$ 时,

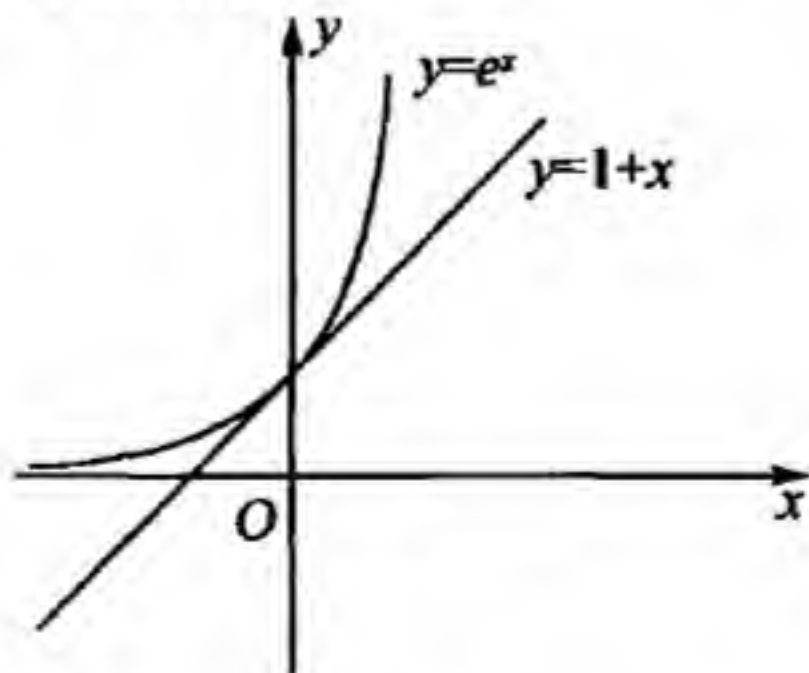
$$f'(x) < 0,$$

所以 $f(x) > f(0) = 0 \quad (x < 0)$,

即 $e^x > 1+x \quad (x < 0)$.

总之, 当 $x \neq 0$ 时 $e^x > 1+x$.

此不等式的几何意义是: $x \neq 0$ 时曲线 $y = e^x$ 位于曲线 $y = 1+x$ 的上方. 如 1289 题图 1 所示



1289 题图 1

(2) 设 $\varphi(x) = x - \ln(1+x)$,

则 $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \quad (x > 0)$,

所以, $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 增大, 故

$$\varphi(x) > \varphi(0) \quad (x > 0),$$

即 $x > \ln(1+x)$.

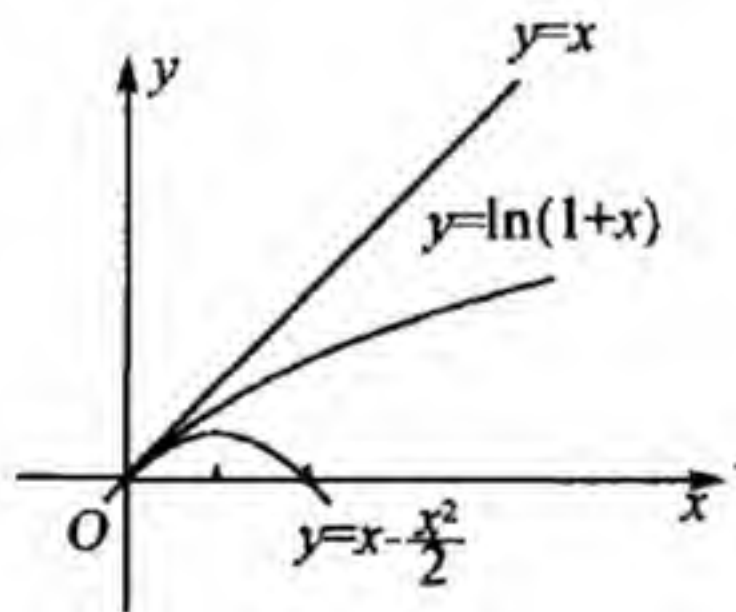
同理可证, 当 $x > 0$ 时,

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x),$$

因此, 当 $x > 0$ 时,

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$$

此不等式表示 $x > 0$ 时曲线 $y = \ln(1+x)$ 介于抛物线 $y = x - \frac{x^2}{2}$ 与直线 $y = x$ 之间. 如 1289 题图 2 所示.



1289 题图 2

(3) 令 $F(x) = x - \sin x$,

则 $F'(x) = 1 - \cos x$,

所以, 当 $x > 0$, 且 $x \neq 2n\pi (n = 1, 2, \dots)$ 时,

$$F'(x) > 0.$$

故 $F(x)$ 在 $x > 0$ 时是严格增大的. 因此, 当 $x > 0$ 时, 有

$$F(x) > F(0) = 0,$$

即 $\sin x < x \quad (x > 0)$.

再设 $G(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$,

则 $G'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2},$

$$G''(x) = -\sin x + x.$$

由前面的证明知 $x > \sin x \quad (x > 0),$

所以, 当 $x > 0$ 时 $G''(x) > 0.$

从而 $G'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 严格增大. 故

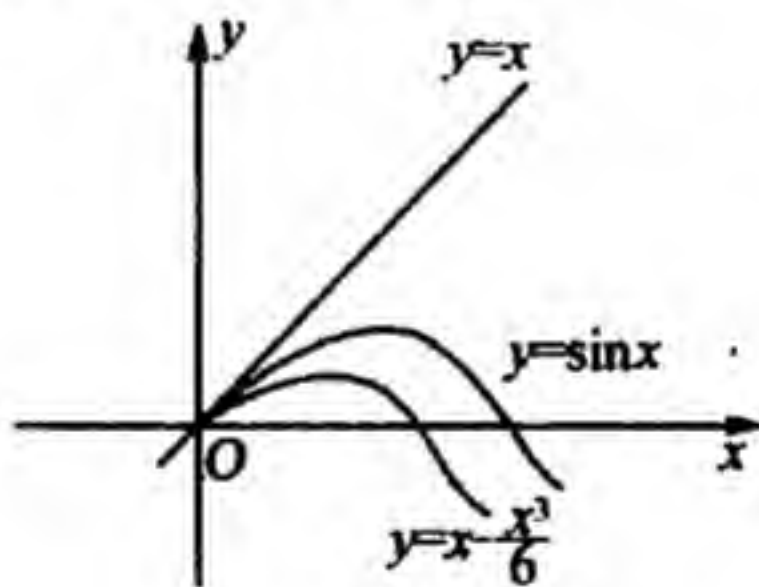
$$G'(x) > G'(0) = 0 \quad (x > 0),$$

所以 $G(x) > G(0) = 0 \quad (x > 0),$

即 $\sin x > x - \frac{x^3}{6} \quad (x > 0).$

因此, 当 $x > 0$ 时 $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x.$

此不等式表示: 在 y 轴的右侧, 曲线 $y = \sin x$ 介于曲线 $y = x - \frac{x^3}{6}$ 与直线 $y = x$ 之间, 如 1289 题图 3 所示.



1289 题图 3

(4) 设

$$F(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3},$$

则 $F'(x) = \sec^2 x - 1 - x^2,$

$$\begin{aligned} F''(x) &= 2\sec x \cdot \sec x \cdot \tan x - 2x \\ &= \frac{2\sin x}{\cos^3 x} - 2x, \end{aligned}$$

$$F'''(x) = 2(1 + 3\tan^2 x)(1 + \tan^2 x) - 2.$$

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $F'''(x) > 0$, 所以

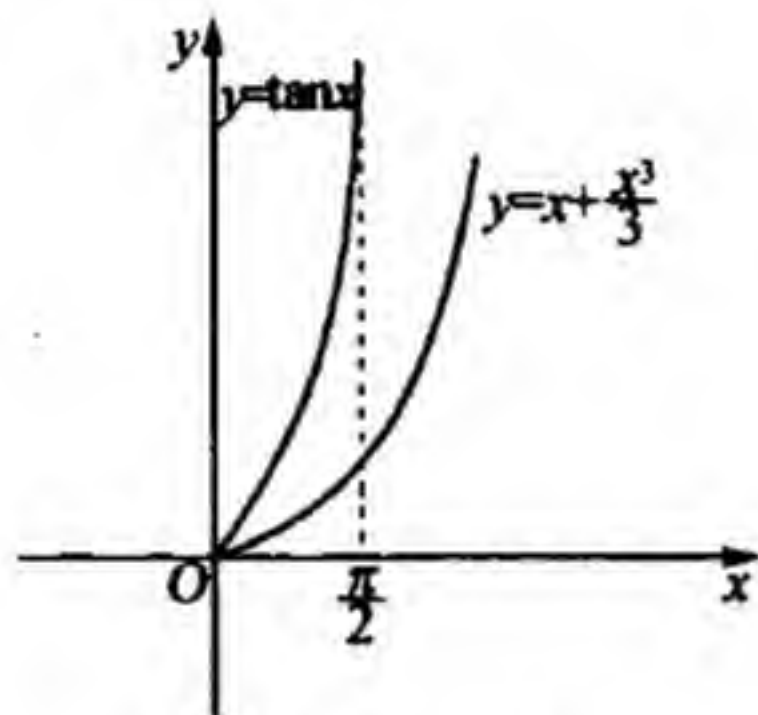
$$F''(x) > F''(0) = 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

从而 $F'(x) > F'(0) = 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$

$$F(x) > F(0) = 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

即 $\tan x > x + \frac{x^3}{3} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$

此不等式表示, 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内, 曲线 $y = \tan x$ 在曲线 $y = x + \frac{x^3}{3}$ 的上方. 如 1289 题图 4 所示.



1289 题图 4

(5) 当 $x = y$ 时, 不等式变为

$$2^{\frac{1}{\alpha}} \cdot x > 2^{\frac{1}{\beta}} x \quad (x > 0),$$

由 $0 < \alpha < \beta$ 知 $2^{\frac{1}{\alpha}} > 2^{\frac{1}{\beta}}$,

所以, 不等式显然成立.

当 $x \neq y$, 且 $x > 0, y > 0$ 时, 不妨设 $0 < \frac{y}{x} < 1$, 令 $a = \frac{y}{x}$, 则我

们只须证明 $(1 + a^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (1 + a^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$.

令 $f(t) = (1 + a^t)^{\frac{1}{t}}, F(t) = \frac{1}{t} \ln(1 + a^t),$

则 $F'(t) = \frac{a^t \cdot \ln a}{t(1 + a^t)} - \frac{\ln(1 + a^t)}{t^2}.$

而由于 $a^t > 0$, 所以, 由本题(2) 的结果有

$$a' - \frac{a'^{2t}}{2} < \ln(1 + a'),$$

从而
$$F'(t) < \frac{a' \ln a}{t(1+a')} - \frac{a' - \frac{a'^{2t}}{2}}{t^2}.$$

由于 $0 < a < 1$ 及 $t > 0$, 所以 $\ln a < 0, a' > a^{2t} > \frac{a^{2t}}{2}$, 从而 $F'(t) < 0 (t > 0)$, 即 $F(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 内是严格递减的, 所以, $f(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 是严格递减的. 故当 $0 < \alpha < \beta$ 时, 有

$$(1 + a^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (1 + a^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

因此 $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \quad (x > 0, y > 0, x \neq y).$

总之, 当 $x > 0, y > 0, \beta > \alpha > 0$ 时有

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

【1290】 证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 不等式 $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$ 成立.

证 由 1289 题(3), 我们已有

$$\sin x < x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

下面我们证明不等式的前半部, 设

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

则显然 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi},$

而
$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x).$$

由 1289 题(4) 知, 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\tan x > x + \frac{\pi^3}{3} > x,$$

且 $\cos x > 0$, 所以

$$f'(x) < 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

所以, $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内是减小的, 因而, 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时

$$f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi},$$

即 $\sin x > \frac{2}{\pi}x.$

因此 $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}).$

【1291】 证明: 当 $x > 0$ 时, 有不等式

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

证 设 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = e^{(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})}.$

则 $f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right],$

而当 $t > 0$ 时, 由 1289 题(2) 的结果有

$$\ln(1+t) < t.$$

所以, 当 $x > 0$ 时,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0.$$

而 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} > 0 \quad (x > 0),$

故 $f'(x) < 0 \quad (x > 0)$, 所以, 在 $(0, +\infty)$ 内 $f(x)$ 是严格递减的.

而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = e,$

所以 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} > e \quad (x > 0).$

同理可证 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e \quad (x > 0).$

因此, 当 $x > 0$ 时, 有 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$

【1292】 设等差级数和等比级数有相同的项数及相同的首项与末项, 且它们每一项都是正数.

证明: 等差级数各项的和大于或等于等比级数各项的和.

证 法一: 设等差级数的公差为 d , 等比级数的公比为 q .

如果 $d = 0$, 易见, 两个级数数列均为常数数列, 且通项相同. 因此, 其和相等.

如果 $d \neq 0$, 不妨设 $d > 0$ (否则将数列颠倒, 首项变末项即可). 由于各项均为正的, 所以 $q > 0$, 且 $q \neq 1$.

设首项为 a , 则末项为 $a + nd = aq^n$, 考虑函数

$$f(x) = a + xd - aq^x,$$

根据题设有 $f(0) = f(n) = 0$. 所以存在一点 $c \in (0, n)$, 使得 $f'(c) = 0$, 而

$$f''(x) = -aq^x \ln^2 q < 0.$$

从而 $f'(x) = d - aq^x \ln q$.

为一递减函数, 所以

当 $0 < x < c$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $c < x < n$ 时, $f'(x) < 0$.

从而当 $0 \leq x \leq n$ 时, $f(x) \geq 0$, 其中等号仅当 $x = 0$ 及 $x = n$ 时成立. 特别地, 对 $0 < k < n$, 有

$$f(k) = a + kd - aq^k > 0,$$

即 $a + kd > aq^k$.

所以 $\sum_{k=0}^n (a + kd) > \sum_{k=0}^n aq^k$.

法二: 设等差级数各项为 a_1, a_2, \dots, a_n , 公差为 d ; 等比级数各项为 b_1, b_2, \dots, b_n , 公比为 q , 记其和为

$$\sigma = \sum_{k=1}^n a_k, S = \sum_{k=1}^n b_k.$$

当 $q = 1$ 时, 由 $a_1 = b_1, a_n = b_n$, 可得 $d = 0$, 从而

$$\sigma = S.$$

当 $q < 1$ 时, 由 $a_1 = b_1$,

及 $a_n = a_1 + (n-1)d, b_n = b_1 q^{n-1}$,

且 $a_n = b_n$,

得 $a_1 + (n-1)d = b_1 q^{n-1}$,

即
$$d = -\frac{1-q^{n-1}}{n-1}a_1 \quad (a_1 > 0).$$

那么有
$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{k=1}^n [a_1 + (k-1)d] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[a_1 - \frac{k-1}{n-1}(1-q^{n-1})a_1 \right] \\ &= a_1 \left[n - \frac{1-q^{n-1}}{n-1} \sum_{k=1}^n (k-1) \right] \\ &= \frac{n}{2}a_1(1+q^{n-1}),\end{aligned}$$

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q},$$

考察
$$\begin{aligned}&\frac{2}{a_1}(1-q)(\sigma-S) \\ &= n(1-q)(1+q^{n-1}) - 2(1-q^n) \\ &= n(1-q+q^{n-1}-q^n) - 2(1-q^n) \\ &= (n-2)(1-q^n) - nq(1-q^{n-2}).\end{aligned}$$

作函数
$$\begin{aligned}\varphi(t) &= (n-2)(1-t^n), \\ \psi(t) &= nt(1-t^{n-2}).\end{aligned}$$

则有
$$\varphi(1) = \psi(1) = 0, \varphi'(1) = \psi'(1) = -n(n-2).$$

设
$$F(t) = \varphi(t) - \psi(t).$$

则
$$\begin{aligned}F''(t) &= -n(n-1)(n-2)t^{n-2} + n(n-1)(n-2)t^{n-3} \\ &= n(n-1)(n-2)t^{n-3}(1-t).\end{aligned}$$

当 $0 < t < 1$ 时, $F''(t) > 0$, 所以

$$F'(t) < F'(1) = 0.$$

故 $F(t)$ 在 $(0, 1)$ 上是减函数, 从而

$$F(t) > F(1) = 0 \quad (0 < t < 1),$$

即
$$\varphi(t) > \psi(t) \quad (0 < t < 1),$$

从而, 当 $0 < q < 1$ 时,

$$\frac{2}{a_1}(1-q)(\sigma-S) > 0.$$

所以 $\sigma > S$.

当 $q > 1$ 时, 类似地证明可得 $\sigma > S$.

【1293】 根据不等式 $\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \geq 0$, 证明柯西不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2,$$

其中 $x, a_k, b_k (k = 1, \dots, n)$ 都是实数.

证 由于

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right) x + \sum_{k=1}^n b_k^2, \end{aligned}$$

对任何 x 都成立, 故上述二次式的判别式不能为正, 即

$$4\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) \leq 0.$$

因此 $\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$.

【1294】 证明: 正数的算术平均数不大于这些数的平方平均

数, 即 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2}$.

证 利用 1293 题的结果, 令

$$a_k = x_k, b_k = \frac{1}{n}.$$

则有 $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} x_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2$.

所以 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2}$.

【1295】 证明: 正数的几何平均数不大于这些数的算术平均

数, 即 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$.

提示: 采用数学归纳法.

证。 设

$$G_n = (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}},$$

$$A_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n),$$

则有 $G_n^n = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n,$

$$nA_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

当 $n = 2$ 时, 我们已有不等式 $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}.$

现假设当 $n = k$ 时, 有

$$G_k \leq A_k.$$

则
$$\begin{aligned} G_{k+1} &= (x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \cdot x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \\ &= [(G_k)^k \cdot x_{k+1}]^{\frac{1}{k+1}} \\ &= (G_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \\ &\leq A_k^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}. \end{aligned}$$

设 $f(x) = x^a - (1 - a + ax) \quad (0 < a < 1),$

则 $f'(x) = a(x^{a-1} - 1).$

所以, 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 从而 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上严格增加;

当 $1 < x < +\infty$ 时, $f'(x) < 0$, 从而 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上严格减小.

因此, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时,

$$f(x) \leq f(1) = 0.$$

即 $x^a \leq 1 - a + ax.$

令 $a = \frac{1}{p}, 1 - a = \frac{1}{q}, x = \frac{a}{b}$

$$(a > 0, b > 0, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1).$$

于是, 有

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

$$(p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, a > 0, b > 0).$$

令 $A_k = a, x_{k+1} = b,$

$$p = \frac{k+1}{k} > 1, q = k+1 > 1,$$

$$\text{且} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{k+1} = 1,$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad A_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}(x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} &\leq \frac{k}{k+1}A_k + \frac{1}{k+1}x_{k+1} \\ &= \frac{1}{k+1}(kA_k + x_{k+1}) \\ &= \frac{1}{k+1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}) \\ &= A_{k+1}. \end{aligned}$$

从而 $G_{k+1} \leq A_{k+1}$,

根据数学归纳法知,对任何自然数 n 有

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

【1296】 设 a, b 为正数,则由以下等式

$$\Delta_s(a, b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2} \right)^{\frac{1}{s}} \quad (\text{若 } s \neq 0),$$

$$\Delta_0(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta_s(a, b).$$

所定义的函数称作两个正数 a 与 b 的 s 阶平均数. 特别是,当 $s = -1$ 时,得调和平均数,当 $s = 0$ 时,得几何平均数(请证明!)当 $s = 1$ 时,得算术平均数;当 $s = 2$ 时得平方平均数.

证明:(1) $\min(a, b) \leq \Delta_s(a, b) \leq \max(a, b)$;

(2) 当 $a \neq b$ 时,函数 $\Delta_s(a, b)$ 是变量 s 的递增函数;

(3) $\lim_{s \rightarrow -\infty} \Delta_s(a, b) = \min(a, b)$;

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \Delta_s(a, b) = \max(a, b).$$

提示:研究 $\frac{d}{ds} [\ln \Delta_s(a, b)]$.

证 我们首先证明 $\Delta_0(a, b)$ 是几何平均数,由题设有

$$\Delta_0(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta_s(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} e^{\frac{1}{s} \ln \frac{a^s + b^s}{2}},$$

研究 $f(x) = \ln \frac{a^x + b^x}{2}$ 在 $x = 0$ 点的导数,有

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{a^x + b^x}{2}.$$

另一方面

$$\begin{aligned} f'(0) &= f'(x) \big|_{x=0} \\ &= \frac{2}{a^x + b^x} \cdot \frac{1}{2} [a^x \ln a + b^x \ln b] \bigg|_{x=0} \\ &= \frac{1}{2} (\ln a + \ln b). \end{aligned}$$

因此 $\Delta_0(a, b) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \ln \frac{a^S + b^S}{2} = e^{f'(0)}$
 $= e^{\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = \sqrt{ab}.$

(1) 当 $S > 0$ 时, 由于

$$2[\min(a, b)]^S \leq a^S + b^S \leq 2[\max(a, b)]^S,$$

所以 $\min(a, b) \leq \left(\frac{a^S + b^S}{2} \right)^{\frac{1}{S}} \leq \max(a, b).$

当 $S < 0$ 时, 由于

$$2[\max(a, b)]^S \leq a^S + b^S \leq 2[\min(a, b)]^S.$$

所以 $\min(a, b) \leq \left(\frac{a^S + b^S}{2} \right)^{\frac{1}{S}} \leq \max(a, b).$

因此, 我们总有

$$\min(a, b) \leq \Delta_S(a, b) \leq \max(a, b).$$

(2) $\frac{d}{dS} \ln \Delta_S(a, b)$

$$= -\frac{1}{S^2} \ln \frac{a^S + b^S}{2} + \frac{a^S \ln a + b^S \ln b}{S(a^S + b^S)}$$

$$= \frac{1}{S^2(a^S + b^S)} \left[(a^S \ln a^S + b^S \ln b^S) - (a^S + b^S) \ln \frac{a^S + b^S}{2} \right].$$

由于 $a^S > 0, b^S > 0$, 参看 1314 题(3) 的结果知

$$a^S \ln a^S + b^S \ln b^S > (a^S + b^S) \ln \frac{a^S + b^S}{2} \quad (a \neq b).$$

所以 $\frac{d}{dS} \ln \Delta_S(a, b) > 0,$

即 $\ln \Delta_S(a, b)$ 是严格增大的. 由于 $\ln x$ 是 x 的严格单调增加的函数, 故 $\Delta_S(a, b)$ 是 S 的严格增的函数.

(3) 不妨设 $0 < a < b$, 于是

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow -\infty} \Delta S(a, b) &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left(\frac{a^s + b^s}{2} \right)^s \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} a \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^s \right)^{\frac{1}{s}}.\end{aligned}$$

而当 $S < 0$,

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^s < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

故 $\lim_{s \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^s \right)^{\frac{1}{s}} = 1.$

所以 $\lim_{s \rightarrow -\infty} \Delta S(a, b) = a = \min(a, b),$

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow +\infty} \Delta S(a, b) &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^s + b^s}{2} \right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \lim_{s \rightarrow +\infty} b \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^s \right)^{\frac{1}{s}} \\ &= b = \max(a, b).\end{aligned}$$

【1297】 证明下列不等式

- (1) 当 $a \geq 2, x > 1$ 时, $x^a - 1 > a(x - 1)$;
- (2) 当 $n > 1, x > a > 0$ 时, $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x - a}$;
- (3) 当 $x > 0$ 时, $1 + 2\ln x \leq x^2$.

证 设 $f(x) = x^a \quad (a \geq 2).$

则 $f'(x) = ax^{a-1} > a \quad (x > 1).$

由罗尔定理, 知存在 $c \in (1, x)$, 使得

$$f(x) - f(1) = f'(c)(x - 1),$$

即 $x^a - 1 = ac^{a-1}(x - 1).$

从而 $x^a - 1 > a(x - 1).$

(2) 设 $f(x) = \sqrt[n]{x - a} - \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{a}.$

则 $f(a) = 0, f'(x) = \frac{1}{n} [(x - a)^{-\frac{n-1}{n}} - x^{-\frac{n-1}{n}}].$

注意到 $n > 1, x > a > 0$ 有 $\frac{n-1}{n} > 0, x > x - a > 0,$

所以 $f'(x) > 0$, 即当 $x > a$ 时 $f(x)$ 是严格单调增加的.

因此 $f(x) > f(a) = 0 \quad (x > a)$,

即 $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}$.

(3) 设 $f(x) = x^2 - 2\ln x - 1$.

则 $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$.

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减小.

当 $1 < x < +\infty$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增加.

故当 $x > 0$ 时,

$$f(x) > f(1) = 0.$$

因此 $x^2 > 2\ln x + 1 \quad (x > 0)$.

§ 8. 凹凸性. 拐点

1. 凹凸的充分条件 如果曲线

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

的一段位于经过该线段任何点的切线之上(或之下), 则称可微分函数 $y = f(x)$ 的图形在闭区间 $[a, b]$ 内是上凹或下凸(下凹或上凸)的. 当 $a \leq x \leq b$ 时, 假设二阶导数 $f''(x)$ 存在. 当 $a < x < b$ 时, 不等式 $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) 的成立, 是图形凹(凸)的充分条件.

2. 拐点的充分条件 如果函数图形在某点的凹凸性改变, 则称此点为拐点.

若在点 x_0 , 或是 $f''(x_0) = 0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在, 且 $f'(x_0)$ 有意义, 如果当 x 变动经过 x_0 时, $f''(x)$ 改变其符号, 则 x_0 就是拐点.

【1298】 研究曲线 $y = 1 + \sqrt[3]{x}$ 在点 $A(-1, 0)$, 点 $B(1, 2)$ 和点 $C(0, 0)$ 的凹凸方向.

$$\text{解 } y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}.$$

在 $A(-1, 0)$ 点, $y'' = \frac{2}{9} > 0$, 故在该点附近, 曲线的图形是凹的.

在 $B(1, 2)$ 点, $y'' = -\frac{2}{9} < 0$, 故在该点附近, 曲线的图形是凸的.

$C(0,0)$ 点不在曲线上.

求以下函数图形的凹凸区域和拐点(1299 ~ 1301).

【1299】 $y = 3x^2 - x^3$.

解 $y' = 6x - 3x^2, y'' = 6 - 6x$.

当 $-\infty < x < 1$ 时, $y'' > 0$, 故图象是凹的.

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y'' < 0$, 故图象是凸的.

点 $(1,2)$ 是拐点.

【1300】 $y = \frac{a^2}{a^2 + x^2} \quad (a > 0)$.

解 $y' = -\frac{2a^2x}{(a^2 + x^2)^2}, y'' = -\frac{2a^2(a^2 - 3x^2)}{(a^2 + x^2)^3}$.

当 $|x| < \frac{a}{\sqrt{3}}$ 时, $y'' < 0$, 故图象是凸的.

当 $|x| > \frac{a}{\sqrt{3}}$ 时, $y'' > 0$, 故图象是凹的.

$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$ 是拐点.

【1301】 $y = x + x^{\frac{5}{3}}$.

解 $y' = 1 + \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}, y'' = \frac{10}{9} \cdot x^{-\frac{1}{3}}$.

当 $-\infty < x < 0$ 时, $y'' < 0$, 故图象是凸的.

当 $0 < x < +\infty$ 时, $y'' > 0$, 故图象是凹的.

$x = 0$ 是拐点.

【1302】 $y = \sqrt{1+x^2}$.

解 $y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, y'' = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} > 0$.

故在 $(-\infty, +\infty)$ 内, 图象始终是凹的, 无拐点.

【1303】 $y = x + \sin x$.

解 $y' = 1 + \cos x, y'' = -\sin x$.

当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ 时, $y'' < 0$, 故图象是凸的.

当 $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ 时, $y'' > 0$, 故图象是凹的.

$x = k\pi$ 是拐点 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

【1304】 $y = e^{-x^2}$.

解 $y' = -2xe^{-x^2}, y'' = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$.

当 $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的.

当 $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的.

$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 是拐点.

【1305】 $y = \ln(1 + x^2)$.

解 $y' = \frac{2x}{1+x^2}, y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

当 $|x| < 1$ 时, $y'' > 0$, 故图象是凹的.

当 $|x| > 1$ 时, $y'' < 0$, 故图象是凸的.

$x = \pm 1$ 是拐点.

【1306】 $y = x \sin(\ln x) \quad (x > 0)$.

解 $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$,

$$y'' = \frac{\sqrt{2}}{x} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right).$$

令 $y'' = 0$.

得 $x = e^{k\pi + \frac{\pi}{2}} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

当 $e^{2k\pi - \frac{3\pi}{4}} < x < e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}$ 时, $y'' > 0$, 故图象是凹的.

当 $e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}} < x < e^{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}$ 时, $y'' < 0$, 故图象是凸的.

$x = e^{k\pi + \frac{\pi}{2}} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是拐点.

【1307】 $y = x^x \quad (x > 0)$.

解 $y' = x^x(\ln x + 1)$,

$$y'' = x^x \left[\frac{1}{x} + (\ln x + 1)^2 \right].$$

当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$, 故图象始终是凹的.

【1308】 证明: 曲线 $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ 有在同一直线上的三个

拐点.

作此函数的图形.

$$\text{证 } y' = \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2},$$

$$y'' = \frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^2}.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x_1 = -2-\sqrt{3}, x_2 = -2+\sqrt{3}, x_3 = 1$, 易见它们都是图象的拐点, 对应的函数值为

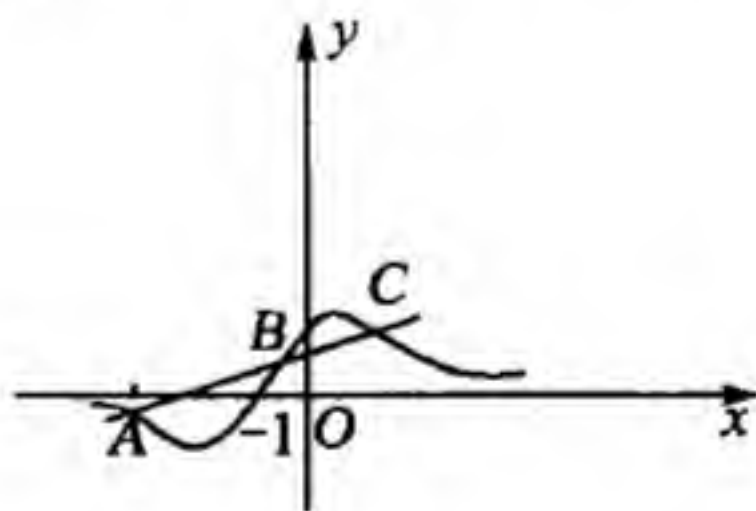
$$y_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}, y_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, y_3 = 1$$

由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2+\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \\ 1 & \frac{1+\sqrt{3}}{4} & \frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix} = 0,$$

所以拐点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 在同一条直线上.

如 1308 题图所示



1308 题图

【1309】 应如何选择参数 h , 使“概率曲线” $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$ ($h >$

0) 有拐点 $x = \pm \sigma$?

$$\text{解 } y' = \frac{-2h^3 x}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}, y'' = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} (4h^4 x^2 - 2h^2).$$

$$\text{令 } y'' = 0 \text{ 得 } x^2 = \frac{1}{2h^2}.$$

由于拐点为 $\arctan x = \pm \sigma$, 故有 $h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$.

即 $h = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \quad (\sigma > 0).$

【1310】 研究摆线

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (a > 0),$$

的凹凸性.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \cot \frac{t}{2},$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{\frac{1}{2}\csc^2 \frac{t}{2}}{a(1 - \cos t)} < 0$$

$$(2k\pi < t < 2(k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

故摆线始终呈凸状.

【1311】 假设函数 $f(x)$ 在区间 $a \leq x < +\infty$ 内可微分二次, 并且

(1) $f(a) = A > 0$; (2) $f'(a) < 0$; (3) 当 $x > a$ 时 $f''(x) \leq 0$.

证明: 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(a, +\infty)$ 内有且仅有一个实根.

证 由于 $f'(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且当 $a < x < +\infty$ 时, $f''(x) < 0$, 故 $f'(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上是减小的, 于是当 $x \in [a, +\infty)$ 时 $f'(x) \leq f'(a) < 0$. 因此, $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上是严格减小的. 因此在 $[a, +\infty)$ 内至多存在一点 c 使 $f(c) = 0$. 即方程 $f(x) = 0$ 在 $(a, +\infty)$ 内至多有一个根.

下面证明必存在点 $x_0 \in (a, +\infty)$ 使 $f(x_0) = 0$.

设 $F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$.

则 $F'(x) = f'(x) - f'(a), \quad F''(x) = f''(x)$

$$(a \leq x < +\infty).$$

于是当 $a \leq x < +\infty$ 时, $F''(x) \leq 0$, 从而 $F'(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上是减小的. 所以当 $x \in [a, +\infty)$ 时,

$$F'(x) \leq F'(a) = 0.$$

因此, $F(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上是减小的.

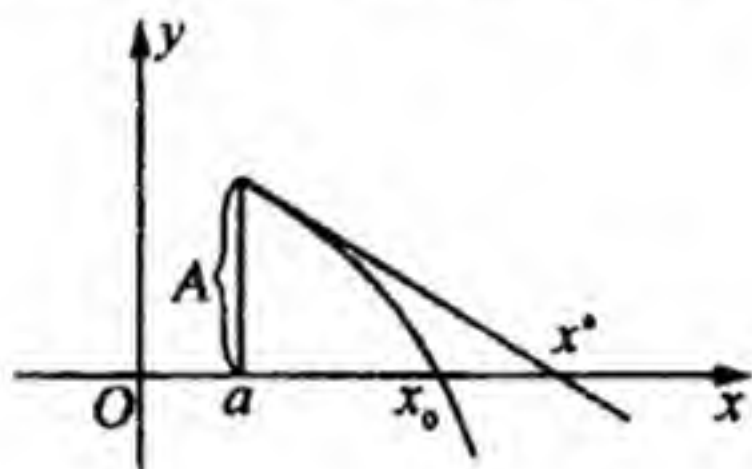
所以 $F(x) \leq F(a) = 0 \quad (a \leq x < +\infty).$

令 $x^* = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$

由于 $f(a) > 0, f'(a) < 0,$
故 $x^* > a$, 显然

$$\begin{aligned} F(x^*) &= f(x^*) - f(a) - f'(a) \left[-\frac{f(a)}{f'(a)} \right] \\ &= f(x^*). \end{aligned}$$

而 $F(x^*) \leq 0$, 故 $f(x^*) \leq 0$. 于是连续函数的介值定理, 必有 $x_0 \in (a, x^*)$ 使 $f(x_0) = 0$. 如 1311 题图所示



1311 题图

【1312】 如果对于区间 (a, b) 内任何两个点 x_1 与 x_2 和任意两个数 λ_1 与 λ_2 ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$) 成立不等式

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

(或对应的相反不等式 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$) 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是凹(凸)的.

证明: (1) 当 $a < x < b$ 时, 如果 $f''(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 区间是凹;

(2) 当 $a < x < b$ 时, 如果 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上是凸.

证 法一: 设 x_1, x_2 为 (a, b) 中任意两点, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. 不妨设 $x_1 < x_2$. 再设

$$\begin{aligned} F(t) &= f[(1-t)x_1 + tx_2] - (1-t)f(x_1) - tf(x_2) \\ &\quad (0 \leq t \leq 1). \end{aligned}$$

显然 $F(0) = f(x_1) - f(x_1) = 0,$

$$F(1) = f(x_2) - f(x_2) = 0.$$

由中值定理, 存在 $c \in (x_1, x_2)$ 使 $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$.

所以, 当 $0 \leq t \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} F'(t) &= (x_2 - x_1)f'[(1-t)x_1 + tx_2] - [f(x_2) - f(x_1)] \\ &= (x_2 - x_1)\{f'[(1-t)x_1 + tx_2] - f'(c)\}. \end{aligned}$$

$$\text{令 } t_0 = \frac{c - x_1}{x_2 - x_1},$$

则 $0 < t_0 < 1$,

且 $c = (1 - t_0)x_1 + t_0x_2$.

于是 $F'(t_0) = 0$.

而 $F''(t) = (x_2 - x_1)^2 f''[(1-t)x_1 + tx_2] \quad (0 \leq t \leq 1)$.

(1) 若 $f''(x) > 0 \quad (a < x < b)$.

则由上式知 $F''(t) > 0 \quad (0 \leq t \leq 1)$,

故 $F'(t)$ 在 $0 \leq t \leq 1$ 上是严格增大的.

由 $F'(t_0) = 0$, 当 $0 \leq t < t_0$ 时, $F'(t) < 0$;

当 $t_0 < t \leq 1$ 时, $F'(t) > 0$.

所以在 $[0, t_0]$ 上, $F(t)$ 是严格减小的, 在 $[t_0, 1]$ 上, $F(t)$ 是严格增大的.

故当 $0 < t \leq t_0$ 时 $F(t) < F(0) = 0$.

当 $t_0 \leq t < 1$ 时 $F(t) < F(1) = 0$.

因此, 当 $0 < t < 1$ 时, 恒有 $F(t) < 0$. 特别地

$$F(\lambda_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_1 f(x_1) - \lambda_2 f(x_2) < 0.$$

故 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$.

因此, $f(x)$ 在 (a, b) 上的凹的.

(2) 若 $f''(x) < 0 \quad (a < x < b)$, 则 $F''(t) < 0 \quad (0 \leq t \leq 1)$ 与(1)完全类似地可推知: 当 $0 < t < 1$ 时, 恒有 $F(t) > 0$, 特别地 $F(\lambda_2) > 0$. 从而

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

故 $f(x)$ 在 (a, b) 上是凸的.

法二: 设 x_1, x_2 为 (a, b) 中任意两点, 且 $x_1 < x_2$, 令

则 $c = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \quad (\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1),$
 $x_1 < c < x_2.$

根据 1266 题的证明, 可得

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + \frac{1}{2}(x-c)^2 f''(\xi),$$

其中 ξ 位于 x 与 c 之间, $(x_1 \leq x \leq x_2).$ 从而

$$f(x_1) = f(c) + (x_1 - c)f'(c) + \frac{1}{2}(x_1 - c)^2 f''(\xi_1), \quad ①$$

$$f(x_2) = f(c) + (x_2 - c)f'(c) + \frac{1}{2}(x_2 - c)^2 f''(\xi_2), \quad ②$$

其中 $a < x_1 < \xi_1 < c, c < \xi_2 < x_2 < b,$

λ_1 乘以 ① 式加上 λ_2 乘以 ② 式得

$$\begin{aligned} & \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)f(c) + [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)c]f'(c) \\ & \quad + \frac{1}{2}[\lambda_1 (x_1 - c)^2 f''(\xi_1) + \lambda_2 (x_2 - c)^2 f''(\xi_2)]. \end{aligned}$$

由 $c = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$

$$\begin{aligned} & \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \\ &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\ & \quad + \frac{1}{2}[\lambda_1 (x - c)^2 f''(\xi_1) + \lambda_2 (x - c)^2 f''(\xi_2)], \end{aligned}$$

当 $f''(x) > 0$ 时, 有

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

即 $f(x)$ 在 (a, b) 上是凹的.

当 $f''(x) < 0$ 时, 有

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

即 $f(x)$ 在 (a, b) 上是凸的.

【1313】 证明: 函数 $x^n (n > 1), e^x, x \ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是凹的, 而函数 $x^n (0 < n < 1), \ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是凸的.

解 (1) 设 $y = x^n \quad (n > 1)$

则 $y' = nx^{n-1}, y'' = n(n-1)x^{n-2} > 0 \quad (0 < x < +\infty)$.

所以 $y = x^n$ 在 $(0, +\infty)$ 上是凹的.

若 $0 < n < 1$, 则显然

$$y'' = n(n-1)x^{n-2} < 0 \quad (0 < x < +\infty).$$

故函数在 $(0, +\infty)$ 是凸的.

(2) $(e^x)'' = e^x > 0$. 所以 $y = e^x$ 的图象始终是凹的.

(3) 设 $y = x \ln x$.

则 $y' = \ln x + 1, y'' = \frac{1}{x}$.

当 $0 < x < +\infty$ 时, $y'' > 0$, 故图象是凹的.

$$(4) (\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

因此, $y = \ln x$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 内是凸的.

【1314】 证明以下不等式, 并解释它们的几何意义:

$$(1) \frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

$$(x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1);$$

$$(2) \frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x \neq y);$$

$$(3) x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, \text{ 若 } x > 0 \text{ 和 } y > 0.$$

证 由 1312 题的结果知, 若 $f(x)$ 的图象在 (a, b) 内是凹的, 则对于 (a, b) 中的任意不同的两点 x 和 y 有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(x) + f(y)].$$

(在 1312 题中取 $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$).

(1) $f(x) = x^n (n > 1)$ 在 $(0, +\infty)$ 内是凹的, 所以对于 $x > 0, y > 0, x \neq y$ 有

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

(2) $f(x) = e^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的, 所以对任意 $x, y, (x$

$\neq y$) 有

$$\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}.$$

(3) $f(x) = x \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是凸的.

故对于 $x, y \in (0, +\infty), x \neq y$, 有

$$\frac{x \ln x + y \ln y}{2} > \frac{x+y}{2} \ln \frac{x+y}{2},$$

即 $x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}.$

它们的几何意义: 联接点 $(x, f(x))$ 与点 $(y, f(y))$ 的弦的中点始终位于由线 $y = f(x)$ 上对应点(具相同横坐标)的上方.

【1314. 1】 设: 当 $a \leq x \leq b$ 时, $f''(x) \geq 0$, 证明: 对任意的 $x_1, x_2 \in [a, b], f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$.

证 在 1312 题的证明中取 $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}$, 立得.

【1315】 证明: 有界的凸函数处处都是连续的, 且具有单侧的左或右导数.

证 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内是凸的, $x_0 \in (a, b)$ 取 x_0 的一邻域 $N_{\delta_0}(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$, 使得

$$N_{\delta_0}(x_0) \subset (a, b),$$

记 $M = \min\{f(x_0 - \delta_0), f(x_0 + \delta_0)\}.$

设 $x \in N_{\delta_0}(x_0),$

$$t = \frac{|x - x_0|}{\delta_0},$$

则 $0 < t < 1.$

当 $x_0 < x < x_0 + \delta_0$ 时, 有

$$x = t(x_0 + \delta_0) + (1-t)x_0,$$

及 $x_0 = \frac{1}{1+t}x + \frac{t}{1+t}(x_0 - \delta_0).$

由于 $f(x)$ 为凸函数, 故有

$$f(x) > tf(x_0 + \delta_0) + (1-t)f(x_0)$$

$$\geq tM + (1-t)f(x_0), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f(x_0) &> \frac{1}{1+t}f(x) + \frac{t}{1+t}f(x_0 - \delta_0) \\ &\geq \frac{f(x) + tM}{1+t}. \end{aligned} \quad (2)$$

由①得

$$f(x) - f(x_0) > -t[f(x_0) - M].$$

由②得

$$t[f(x_0) - M] > f(x) - f(x_0).$$

从而 $f(x_0) - M > 0$,

$$\begin{aligned} \text{且 } |f(x) - f(x_0)| &< t[f(x_0) - M] \\ &= \frac{f(x_0) - M}{\delta_0} |x - x_0|. \end{aligned} \quad (3)$$

当 $x_0 - \delta_0 < x < x_0$ 时, 类似地可导出③

这说明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$,

也就是凸函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

记 $x = x_0 + h$.

则③式可改写为

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| < \frac{|f(x_0) - M|}{\delta_0}.$$

设 $\varphi(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) \quad (-\delta_0 < h < \delta_0)$.

则 $\varphi(h)$ 为凸函数, 事实上

$$\begin{aligned} &\varphi(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) \\ &= f(x_0 + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) - f(x_0) \\ &= f[\lambda_1(x_0 + h_1) + \lambda_2(x_0 + h_2)] - f(x_0) \\ &> \lambda_1 f(x_0 + h_1) + \lambda_2 f(x_0 + h_2) - \lambda_1 f(x_0) - \lambda_2 f(x_0) \\ &= \lambda_1 \varphi(h_1) + \lambda_2 \varphi(h_2), \end{aligned}$$

其中 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

又 $\varphi(0) = 0$, 取 $t_1, t_2 \in (0, \delta_0)$, 并设 $t_1 < t_2$, 则有

$$t_1 = \frac{t_1}{t_2} \cdot t_2 + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) \cdot 0.$$

于是 $\varphi(t_1) > \frac{t_1}{t_2}\varphi(t_2) + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)\varphi(0) = \frac{t_1}{t_2}\varphi(t_2)$,

即 $\frac{\varphi(t_1)}{t_1} > \frac{\varphi(t_2)}{t_2}$.

所以 $F(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$ 在 $(0, \delta_0)$ 是单调递减且有界的函数. 故 $\lim_{h \rightarrow +0} F(t)$

存在. 即 $f(x)$ 在 x_0 的右导数

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

存在. 同理 $f'_-(x_0)$ 存在.

注: 本题不需 $f(x)$ 有界的条件. 若以较弱的不等式

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) \quad (x_1 \neq x_2),$$

作凸函数的定义, 则需加上凸函数有界的条件才能推出本题的结论.

【1316】 假设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 可二次微分, 且 $f''(\xi) \neq 0$, 其中 $a < \xi < b$.

证明: 在区间 (a, b) 中可求得两个值 x_1 和 x_2 , 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

证 不妨设 $f''(\xi) > 0$, 考察 $f'(\xi)$, 分两种情况讨论:

(1) $f'(\xi) = 0$, 则由 $f''(\xi) > 0$, 知 $f(\xi)$ 为 $f(x)$ 的极小值, 从而存在 $\delta > 0$, 使得 $[-\delta + \xi, \xi + \delta] \subset (a, b)$, 且当 $x \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$ 时 $f(x) \geq f(\xi)$. 如果 $f(\xi - \delta) = f(\xi + \delta)$, 则取 $x_1 = \xi - \delta, x_2 = \xi + \delta$, 即合要求.

如果 $f(\xi - \delta) < f(\xi + \delta)$, 取 $x_1 = \xi - \delta$, 而 $f(\xi) < f(\xi - \delta) < f(\xi + \delta)$, 由连续函数的介值定理有, 存在 $x_2 \in (\xi, \xi + \delta)$ 使得

$$f(x_2) = f(x_1).$$

从而有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 = f'(\xi)$.

如果 $f(\xi - \delta) > f(\xi + \delta)$, 类似地证明可得结论.

(2) 若 $f'(\xi) \neq 0$, 则设

$$F(x) = f(x) - f'(\xi)x.$$

从而有 $F'(\xi) = 0, F''(\xi) = f''(\xi) > 0$.

对于函数 $F(x)$, 由(1)的证明知存在 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 使

$$F(x_1) = F(x_2),$$

即 $f(x_1) - f'(\xi)x_1 = f(x_2) - f'(\xi)x_2$.

因此 $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

【1317】 证明: 如果函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(x_0, +\infty)$ 内可二次微分二次, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

则在区间 $(x_0, +\infty)$ 内至少存在一个 ξ 点, 使得 $f''(\xi) = 0$.

证 反设不存在 $\xi \in (x_0, +\infty)$ 使 $f''(\xi) = 0$, 则当 $x > x_0$ 时, 或者 $f''(x) > 0$, 或者 $f''(x) < 0$, 否则, 存在 $a, b \in (x_0, +\infty)$, 使得 $f''(a) < 0, f''(b) > 0$, 不妨设 $a < b$. 则存在 δ_1 , 使得当 $x \in (a, a + \delta_1)$ 时, $f'(x) < f'(a)$, 及存在 δ_2 , 使得当 $x \in (b - \delta_2, b)$ 时 $f'(x) < f'(b)$.

因此, $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值必在 (a, b) 内某点 c 取到, 即 c 为 $f'(x)$ 的极小值, 从而 $f''(c) = 0$. 这与我们的假设相矛盾.

因此, 我们不妨设 $f''(x) > 0$, 从而函数 $f(x)$ 的图象是凹的, 位于其任一点的切线的上方. 再由

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

及 $f(x)$ 的可微性, 由 1237 题的结果知, 存在一点 $c_1 \in (x_0, +\infty)$ 使

$$f'(c_1) = 0,$$

再由 $f''(x) > 0$, 知 $f''(x)$ 单调增大. 从而当 $x > c_1$ 时, $f'(x) > 0$, 取 $c_2 > c_1$. 则

$$f'(c_2) > 0,$$

过 $(c_2, f(c_2))$ 作曲线 $y = f(x)$ 的切线, 其方程为

$$y(x) = f(c_2) + f'(c_2)(x - c_2).$$

显然 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$.

而 $f(x) - y(x) > 0$,

从而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

这与题设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 矛盾. 同理, 若 $f''(x) < 0$ 也可得出同样的矛盾. 因此, 至少存在一点 $\xi \in (x_0, +\infty)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

§ 9. 未定形的求值

洛必达第一法则(未定形 $\frac{0}{0}$ 的求值法) 如果:

(1) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 a 的某邻域 u_ϵ ^① 内有定义并且是连续的(此处 a 为数字或符号 ∞), 且当 $x \rightarrow a$ 时, 两函数都趋向于零;

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

(2) 在点 a 的邻域 u_ϵ 内, 除 a 点本身外, 在其余各点存在导数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$, 并且当 $x \neq a$ 时, 两导数不同时为零;

(3) 存在有穷或无穷极限值 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, 则:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

洛必达第二法则(未定形 $\frac{\infty}{\infty}$ 的求值法).

如果:

(1) 在 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都趋于无穷大:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

其中 a 为数或符号 ∞ ;

(2) 对于属于点 a 的某个邻域 u_ϵ 且不等于 a 的一切 x 值, 存在导数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$, 并且当 $x \in u_\epsilon$ 及 $x \neq a$ 时,

① 所谓点 a 的邻域 u_ϵ , 是指满足不等式

(1) $0 < |x - a| < \epsilon$, 如果 a 是一个数

(2) $|x| > \frac{1}{\epsilon}$, 如果 a 是符号 ∞ .

的 x 的集合

$$f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0.$$

(3) 存在有穷或无穷极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

对单侧极限来说, 有类似的法则.

运用代数变换和取对数的方法, 能使未定形 $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 等等的求值法简化为前面两个主要类型的未定形: $\frac{0}{0}$ 与 $\frac{\infty}{\infty}$ 的求值法.

求出以下各式的值(1318 ~ 1370).

【1318】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$

【1319】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x + \sin x}{2x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x + \cos x}{2} = 1.$

【1320】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x (1 - \cos x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2.$

【1321】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan 4x - 12 \tan x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan 4x - 12 \tan x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12\sec^2 4x - 12\sec^2 x}{12\cos 4x - 12\cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 4x}{\cos^2 x \cdot \cos^2 4x (\cos 4x - \cos x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(\cos 4x + \cos x)}{\cos^2 x \cos^2 4x} = -2.
\end{aligned}$$

【1322】 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x}.$

解
$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 3x}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\cos 3x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} \\
&= -1 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-3\sin 3x} \\
&= (-1) \times \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

【1323】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cot x - 1}{x^2}.$

解
$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cot x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^2 \cdot \tan x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec^2 x}{2x \tan x + x^2 \sec^2 x} \\
&= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^2}{2x \tan x + x^2 + x^2 \tan^2 x} \\
&= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 2 \frac{x}{\tan x} + \left(\frac{x}{\tan x} \right)^2} = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

【1324】 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2\sin^2 x - 1}.$

解
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2\sin^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\tan^2 x}} \cdot \sec^2 x}{4\sin x \cos x} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{【1325】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1 + xe^x - 2e^x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + xe^x - e^x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x + e^x - e^x}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{【1326】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}.$$

解 令 $t = x^2$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t \sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\sin t + t \cos t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{\cos t + \cos t - t \sin t} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{【1327】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-4x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-4x^2}}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-4x^2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-4x^2}}{3x^2} \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-4x}{\sqrt{1-4x^2}}}{6x} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3 = 1.$$

【1328】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arctan \sqrt{\frac{x}{b}} \right).$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arctan \sqrt{\frac{x}{b}} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{a}}{1 + \frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a} \cdot \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{b}}{1 + \frac{x}{b}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{b} \cdot \sqrt{x}}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{x+a} - \frac{b}{x+b}}{3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{a}{(x+a)^2} + \frac{b}{(x+b)^2}}{3}$$

$$= \frac{a-b}{3ab} \quad (ab \neq 0).$$

【1329】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} \quad (a > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - a^{\sin x} \cos x) \ln a}{3x^2}$$

$$= \frac{\ln a}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - a^{\sin x} \cdot \cos^2 x \cdot \ln a + \sin x a^{\sin x}}{2x}$$

$$= \frac{\ln a}{3} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - a^{\sin x} \cos^2 x) \cdot \ln a}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{a^{\sin x}}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{\ln a}{3} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln a}{2} \cdot \frac{a^x \ln a - \cos^3 x a^{\sin x} \ln a + 2 \sin x \cos x a^{\sin x}}{1} + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{\ln a}{6} \quad (a > 0).$$

【1330】 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right).$

解
$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1)^2 + x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = -2.$$

【1331】
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}.$$

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \frac{\cos ax}{\sin ax}}{b \cdot \frac{\cos bx}{\sin bx}}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax}{\cos bx} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{\sin ax}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

【1332】
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}.$$

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \cdot \frac{\sin ax}{\cos ax}}{-b \cdot \frac{\sin bx}{\cos bx}}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos bx}{\cos ax} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$$

$$= \left(\frac{a}{b} \right)^2 \quad (b \neq 0).$$

【1333】
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}.$$

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(\sin x) \cdot \cos x + \sin x}{4x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin(\sin x) - \cos^2 x \cdot \cos(\sin x) + \cos x}{12x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{24x} [\cos x \cdot \sin(\sin x) + \sin x \cos x \cdot \cos(\sin x)]$$

$$+ 2\sin x \cos x \cdot \cos(\sin x) + \cos^3 x \cdot \sin(\sin x) - \sin x]$$

$$= \frac{1}{24}[1 + 1 + 2 + 1 - 1] = \frac{1}{6}.$$

* 利用 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

及 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1$

【1334】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\tan x} \right).$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \operatorname{ch} x - \cos x \operatorname{sh} x}{x \sin x \operatorname{sh} x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \operatorname{ch} x + \sin x \operatorname{sh} x + \sin x \operatorname{sh} x - \cos x \operatorname{ch} x}{\sin x \operatorname{sh} x + x \cos x \operatorname{sh} x + x \sin x \operatorname{ch} x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \operatorname{sh} x + 2 \sin x \operatorname{ch} x}{2(\cos x \operatorname{sh} x + \sin x \operatorname{ch} x + x \cos x \operatorname{ch} x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \frac{\operatorname{sh} x}{x} + \frac{\sin x}{x} \cdot \operatorname{ch} x}{\cos x \cdot \frac{\operatorname{sh} x}{x} + \frac{\sin x}{x} \cdot \operatorname{ch} x + \cos x \cdot \operatorname{ch} x}$$

$$= \frac{2}{3}.$$

* 利用 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ch} x = 1$.

【1335】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arsh}(\operatorname{sh} x) - \operatorname{arsh}(\sin x)}{\operatorname{sh} x - \sin x}$

其中 $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arsh}(\operatorname{sh} x) - \operatorname{arsh}(\sin x)}{\operatorname{sh} x - \sin x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x) - \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})}{\operatorname{sh} x - \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} - \frac{\cos x + \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}}}{\operatorname{ch} x - \cos x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{\operatorname{ch} x - \cos x} \\
&\quad - \frac{\sin x \cdot \sqrt{1 + \sin^2 x} - \frac{\cos^2 x \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{1 + \sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{\operatorname{sh} x + \sin x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}{\operatorname{sh} x + \sin x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x + \sin x} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\operatorname{ch} x + \cos x} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

【1336】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\epsilon} \quad (\epsilon > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\epsilon} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\epsilon x^{\epsilon-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\epsilon x^\epsilon} = 0.$

【1337】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} \quad (a > 0, n > 0).$

解 若 n 为正整数, 则连续运用 n 次洛必达法则有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{ae^{ax}} = \cdots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^n e^{ax}} = 0.$$

若 n 不是正整数, 则

$$[n] < n < [n] + 1.$$

于是 $\frac{x^{[n]}}{e^{ax}} < \frac{x^n}{e^{ax}} < \frac{x^{[n]+1}}{e^{ax}} \quad (x > 1),$

而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{[n]}}{e^{ax}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{[n]+1}}{e^{ax}} = 0,$

因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = 0 \quad (n > 0, a > 0).$

【1338】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}.$

解 令 $t = \frac{1}{x^2}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow +\infty$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{50}}{e^t} = 0.$$

【1339】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0.01x}.$

解
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^{-0.01x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{0.01x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{0.01e^{0.01x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(0.01)^2 e^{0.01x}} = 0. \end{aligned}$$

【1340】 $\lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x).$

解
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-1}{-\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x \cdot \ln^2 x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln^2 x + 2\ln x}{-1} = 0. \end{aligned}$$

【1341】 $\lim_{x \rightarrow +0} x^\epsilon \ln x \quad (\epsilon > 0).$

解
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^\epsilon \ln x &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\epsilon}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\epsilon \cdot \frac{1}{x^{\epsilon+1}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^\epsilon}{-\epsilon} = 0. \end{aligned}$$

【1342】 $\lim_{x \rightarrow +0} x^x.$

解
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^x &= \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} (-x)} \\ &= e^0 = 1. \end{aligned}$$

【1343】 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{x^x-1}.$

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{(x^x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{(x^x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{(e^{x \ln x} - 1) \cdot \ln x}.$$

而由 1341 题的结果知:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = 0,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} = 1,$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x \ln^2 x &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{2 \ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} (-2x \ln x) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \lim_{x \rightarrow +0} (e^{x \ln x} - 1) \ln x &= \lim_{x \rightarrow +0} \left\{ \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \cdot x \ln^2 x \right\} \\ &= 1 \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{(x^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{(e^{x \ln x} - 1) \ln x} = e^0 = 1.$$

、【1344】 $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{x^x} - 1).$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow +0} (x^{x^x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +0} (e^{x^x \ln x} - 1).$$

而由 1342 题结果知

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1,$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow +0} e^{x^x \ln x} = 0,$$

$$\text{因此 } \lim_{x \rightarrow +0} (x^{x^x} - 1) = -1.$$

【1345】 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{k}{1+\ln x}}.$

$$\text{解 } \text{因为 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{k}{1+\ln x} \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} k \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = k,$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{k}{1+\ln x}} = e^k.$$

【1346】 $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$

$$\text{解 } \text{因为 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}$.

【1347】 $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\tan \frac{\pi x}{2}}$.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi x}{2} \cdot \ln(2-x)$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi x}{2} \cdot \frac{\ln(2-x)}{\cos \frac{\pi x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi x}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{\cos \frac{\pi x}{2}}$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-\frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi},$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\tan \frac{\pi x}{2}} = e^{\frac{2}{\pi}}$.

【1348】 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$.

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot \ln(\tan x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \sin x - \ln \cos x}{\cos 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{-2 \cdot \sin 2x} = -1,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} e^{\tan 2x \cdot \ln \tan x} = e^{-1}$.

【1349】 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\sin x}$.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln(\cot x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cot x)}{\csc x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sec^2 x}{\cot x}}{-\csc x \cdot \cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\sin x} = e^0 = 1.$

【1350】 $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x.$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} x \cdot \ln \left(\ln \frac{1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t \ln t} = 0,$

所以 $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x = e^0 = 1.$

【1351】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}.$

解 因为

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{(2x+1)^2}}{\tan \frac{\pi x}{2x+1} \cdot \cos^2 \frac{\pi x}{2x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\pi \cdot \frac{1}{(2x+1)^2}}{\sin \frac{2\pi x}{2x+1}} \\ &= 2\pi \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{4}{(2x+1)^3}}{\frac{2\pi}{(2x+1)^2} \cdot \cos \frac{2\pi x}{2x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{(2x+1) \cos \frac{2\pi x}{2x+1}} = 0, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$

【1352】 $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\tan x}{\tan a} \right)^{\cot(x-a)}.$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow a} \cot(x-a) \ln \left(\frac{\tan x}{\tan a} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \tan x - \ln \tan a}{\tan(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{\sec^2(x-a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos^2(x-a)}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2a} \quad (a \neq \frac{k\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \dots),$$

所以 $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\tan x}{\tan a} \right)^{\cot(x-a)} = e^{\frac{2}{\sin 2a}} \quad (a \neq \frac{k\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

【1353】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a^x - x \ln a) - \ln(b^x - x \ln b)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(a^x - 1) \ln a}{a^x - x \ln a} - \frac{(b^x - 1) \ln b}{b^x - x \ln b}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\frac{a^x \ln^2 a (a^x - x \ln a) - (a^x - 1)^2 \ln^2 a}{(a^x - x \ln a)^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{b^x \ln^2 b (b^x - x \ln b) - (b^x - 1)^2 \ln^2 b}{(b^x - x \ln b)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} (\ln^2 a - \ln^2 b), \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{2} (\ln^2 a - \ln^2 b)}.$

【1354】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$

解
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + x e^x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【1355】 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$

解
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x + x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{【1356】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{2 \cos x - x \sin x} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{【1357】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right].$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x) \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{1+x} \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - (1+x)}{\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + (1+x) \ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1}{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1 + \ln(1+x)} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{【1358】} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad (a > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} [a^x \ln a - a x^{a-1}] = a^a (\ln a - 1).$$

$$\text{【1359】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x^2} \ln(1+x) \right] \\
 &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} \\
 &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(1+x) - 1}{2x} = e \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2(1+x)} = -\frac{e}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\text{【1360】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x \left[\ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right] - a^x \ln a}{2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left\{ (a+x)^x \left[\ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right]^2 \right. \\
 &\quad \left. + (a+x)^x \left[\frac{1}{a+x} + \frac{a}{(a+x)^2} \right] - a^x \ln^2 a \right\} \\
 &= \frac{1}{a}.
 \end{aligned}$$

$$\text{【1361】} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x.$$

解 因为

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)}{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\arctan x} \\
 &= -\frac{2}{\pi},
 \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x = e^{-\frac{2}{\pi}}.$

【1362】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^x.$

解 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(\operatorname{th} x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\operatorname{th} x)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{th} x \cdot \operatorname{ch}^2 x}}{-\frac{1}{x}} = -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\operatorname{sh} 2x} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2 \operatorname{ch} 2x} = -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 \operatorname{sh} 2x} = 0, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^x = e^0 = 1.$

【1363】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \arcsin x - \ln x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x}{2x^2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x}{\left(4x \sqrt{1-x^2} - \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}} \right) \arcsin x + 2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{2(2-3x^2) \arcsin x + 2x \sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-12x \arcsin x + \frac{2(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + 2 \sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6},$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{6}}.$

【1363. 1】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x - \ln x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{4x \sin x + 2x^2 \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin x}{x}}{4 \frac{\sin x}{x} + 2 \cos x} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$

【1363. 2】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{1}{\cos x} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2},$$

从而 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}}.$

因此, 由 1363. 1 题有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \\ &= e^{-\frac{1}{6}} \cdot e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

【1363. 3】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 因为

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\arctan x}{x}\right)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \arctan x - \ln x}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x}}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x^2)\arctan x}{2x^2(1+x^2)\arctan x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 - 2x\arctan x}{(4x + 8x^3)\arctan x + 2x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\arctan x}{(2 + 4x^2)\arctan x + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{8x\arctan x + \frac{2+4x^2}{1+x^2} + 1} = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

因此 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{3}}.$

【1363. 4】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arsh} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}},$

其中 $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$

解 因为

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\operatorname{arsh} x}{x}\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\ln(x + \sqrt{1+x^2})) - \ln x}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x}}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2})} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{2x \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}} \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + x} \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2 + 1} \\
&= -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arsh} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$

【1364】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}.$

解 因为

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$

【1365】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}.$

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} = -\frac{2}{\pi},$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$

【1366】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x - \ln \operatorname{ch} x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x - \operatorname{th} x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sec^2 x - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}{2} = -1. \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-1}.$

【1367】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}}{\operatorname{sh} x \left[\frac{1}{m} (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{m}-1} - \frac{1}{n} (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{n}-1} \right]} = \frac{1}{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} \\ &= \frac{mn}{n-m} \quad (n \neq m). \end{aligned}$$

【1368】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\operatorname{cth} x}.$

解 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{cth} x \cdot \ln \left(\frac{1+e^x}{2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+e^x) - \ln 2}{\operatorname{th} x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\operatorname{cth} x} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$

【1368. 1】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

解 令 $\ln x = t$.

则当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $t \rightarrow +\infty$,

且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^t \ln t} = 0$,

所以 $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^t \ln t - t^2) = +\infty$,

故
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln^2 x}}{e^{x \ln(\ln x)}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{t^2}}{e^{e^t \ln t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{(e^t \ln t - t^2)}} = 0. \end{aligned}$$

【1369】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \frac{\ln(e^x + x)}{x} \right]$.

解
$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \frac{\ln(e^x + x)}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \right] \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} \ln(1 + xe^{-x}), \end{aligned}$$

而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + xe^{-x}) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = 1$,

所以
$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \frac{\ln(e^x + x)}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sqrt[3]{1 + t + t^2 + t^3} - \sqrt{1 + t + t^2}}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow +0} \left[\frac{1+2t+3t^2}{3 \sqrt[3]{(1+t+t^2+t^3)^2}} - \frac{1+2t}{2 \sqrt{1+t+t^2}} \right] \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

【1370】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}].$

解 令 $t = \frac{1}{x}$, 则当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $t \rightarrow +0$,

从而
$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1+\frac{1}{x}} \left[\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}} \right] \\
 &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(1+at)^{1+t} - t^{\frac{at^2}{1+at}}}{t^{1+t}},
 \end{aligned}$$

又 $\lim_{t \rightarrow +0} t \ln t = 0,$

所以 $\lim_{t \rightarrow +0} t^t = 1,$

$$\lim_{t \rightarrow +0} (1+at)^{1+t} = 1, \lim_{t \rightarrow +0} t^{\frac{at^2}{1+at}} = 1,$$

所以
$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}] \\
 &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(1+at)^{1+t} - t^{\frac{at^2}{1+at}}}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t^t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +0} \left\{ (1+at)^{1+t} \left[\ln(1+at) + \frac{a(1+t)}{1+at} \right] \right. \\
 &\quad \left. - t^{\frac{at^2}{1+at}} \left[\frac{at}{1+at} + \frac{2at + a^2 t^2}{(1+at)^2} \ln t \right] \right\} \\
 &= a.
 \end{aligned}$$

【1371】 当 $x \rightarrow 0$ 时, 如果曲线 $y = f(x)$ 成 α 角进入坐标原点 $(0,0)$ [$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$], 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x}$.

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \tan \alpha.$$

【1372】 当 $x \rightarrow +0$ 时, 如果连续曲线 $y = f(x)$ 进入坐标原

点 $(0,0)$ $[\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0]$, 且当 $0 < x < \epsilon$ 时, 此曲线完全在两条直线 $y = -kx$ 与 $y = kx (k \neq \infty)$ 所形成的锐角之内, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{f(x)} = 1.$$

证 根据题设有

$$-kx \leq f(x) \leq kx \quad (0 < x < \epsilon, k > 0).$$

而当 $0 < x < 1$ 时有 $\ln x < 0$, 故

$$kx \ln x \leq f(x) \ln x \leq -kx \ln x.$$

从而 $e^{kx \ln x} \leq e^{f(x) \ln x} = x^{f(x)} \leq e^{-kx \ln x}$,

又 $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = 0$,

所以 $\lim_{x \rightarrow +0} e^{kx \ln x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{-kx \ln x} = e^0 = 1$,

因此 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{f(x)} = 1$.

【1373】 证明: 如果函数 $f(x)$ 存在二阶导数 $f''(x)$, 则

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

证 因为 $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)] = 0$

运用洛必达法则, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} \right) \\ &= \frac{1}{2} [f''(x) + f''(x)] = f''(x). \end{aligned}$$

【1373. 1】 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & \text{若 } x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 处的可微分性.

解 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{1}{2} = f(0).\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 连续.

$$\begin{aligned}\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) - \frac{1}{2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^x - 1 - x) - x(e^x - 1)}{2x^2(e^x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - xe^x}{4x(e^x - 1) + 2x^2e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-xe^x}{4(e^x - 1) + 8xe^x + 2x^2e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x - xe^x}{12e^x + 12xe^x + 2x^2e^x} = -\frac{1}{12},\end{aligned}$$

所以 $f'(0) = -\frac{1}{12}$.

【1373. 2】 求出曲线 $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ ($x > 0$) 的渐近线.

解 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{(1+x)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(y - \frac{1}{e}x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{x^x}{(1+x)^x} - \frac{1}{e} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{t}}} - \frac{1}{e}}{t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{e}}} \cdot \frac{(1+t)\ln(1+t) - t}{t^2(1+t)} \\
&= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{e}}(1+t)} \cdot \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(1+t)\ln(1+t) - t}{t^2} \\
&= \frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\ln(1+t)}{2t} = \frac{1}{2e},
\end{aligned}$$

因此, 曲线 $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ ($x > 0$) 的渐近线为 $y = \frac{1}{e} \left(x + \frac{1}{2} \right)$.

【1374】 研究将洛必达法则用于以下各例的可能性:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2\sin x) + e^{-x^2} \sin^2 x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x+\sin x \cos x}{(x+\sin x \cos x)e^{\sin x}}.$$

解 (1) 因为

$$\frac{\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x},$$

而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在, 所以洛必达法则不适用. 事实上,

原极限是存在的:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1 \times 0 = 0.$$

(2) 因为

$$\frac{(x - \sin x)'}{(x + \sin x)'} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x},$$

而 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ 不存在, 所以, 洛必达法则不适用.

事实上, 原极限是存在的:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1.$$

(3) 如果运用洛必达法则, 就有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2\sin x) + e^{-x^2} \sin^2 x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5e^{-2x} \sin x - 2xe^{-x^2} \sin^2 x + e^{-x^2} \sin 2x}{-2e^{-x} \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2} e^{-x} + xe^{-x^2+x} \sin x - e^{-x^2+x} \cos x \right) = 0. \end{aligned}$$

这个结果是错误的, 事实上, 若取 $x_n = n\pi + \frac{3\pi}{4}$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, 而原式的分母在 x_n 的值为 $e^{-x_n}(\cos x_n + \sin x_n) = 0$. 而分子不为 0, 所以原式的极限不存在. 原因是在求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 时, 虽然 $f(x)$ 及 $g(x)$ 均连续且极限为零, 但 $f'(n\pi) = g'(n\pi) = 0$, 不符合运用洛必达法则的条件. 另一方面也不允许在求极限的过程中, 用 $\sin x$ 作除数, 分子、分母约分后再求极限.

(4) 设 $f(x) = 1 + x + \sin x \cos x$.

$$g(x) = (x + \sin x \cos x)e^{\sin x}.$$

则

$$f'(x) = 1 + \cos 2x,$$

$$g'(x) = e^{\sin x} [1 + \cos 2x + \cos x \cdot (x + \sin x \cos x)],$$

显然

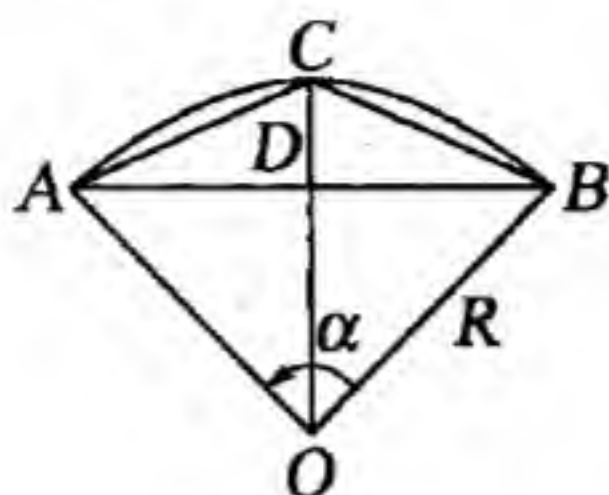
$$f'\left[\frac{2k+1}{2}\pi\right] = g'\left[\frac{2k+1}{2}\pi\right] = 0$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots).$$

所以不符合洛必达法则的条件, 不能应用洛必达法则.

【1375】 设有一圆弓形, 其弦为 b , 矢为 h , 此圆弓形内有一内接等腰三角形, 如果当半径 R 不变, 弓形的弧趋于零时, 求出圆弓形面积与内接等腰三角形面积之比的极限. 利用所得到的结果推导出计算弓形面积的近似公式: $S \approx \frac{2}{3}bh$.

解 如 1375 题图所示



1375 题图

$$AB = b, DC = h, \angle AOB = \alpha,$$

则 $\frac{1}{2}b = AD = R \cdot \sin \frac{\alpha}{2},$

$$h = R - OD = R - R \cos \frac{\alpha}{2},$$

$\triangle ABC'$ 为内接等腰三角形, 其面积为

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bh = R^2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \right),$$

弓形面积为 $S = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin \alpha).$

当弧长趋于零时, α 趋于 0, 于是

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{S}{S_{\triangle ABC}} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin \alpha)}{R^2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \right)} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)}{\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \right)} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{-\frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \left(-\frac{1}{2} + 2 \cos \frac{\alpha}{2} \right)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\cos \frac{\alpha}{2}}{-\frac{1}{2} + 2\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{3},$$

因此,弓形面积的近似公式为

$$S \approx \frac{4}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} bh = \frac{2}{3} bh.$$

§ 10. 泰勒公式

1. 泰勒局部公式 如果

- (1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域 $|x - x_0| < \epsilon$ 内有定义;
- (2) $f(x)$ 在此邻域内有直到 $(n-1)$ (包括 $(n-1)$) 阶的导数 $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$;
- (3) 在 x_0 点存在 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0)$, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad ①$$

其中 $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (k = 0, 1, \dots, n)$.

特别是当 $x_0 = 0$ 时, 有

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \quad ②$$

在所示条件下 ① 式是唯一的.

如果在点 x_0 存在导数 $f^{(n+1)}(x_0)$, 则 ① 式中的余项可取以下形式: $o((x - x_0)^{n+1})$

由泰勒局部公式 ②, 得出以下五个重要展开式:

$$① e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$② \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$$

$$③ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$④ (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

$$\textcircled{5} \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

2. 泰勒公式 如果

- (1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内有定义;
- (2) $f(x)$ 在此区间有连续导数 $f'(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$;
- (3) 当 $a < x < b$ 时, 存在有限导数 $f^{(n)}(x)$, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n)}[a+\theta(x-a)]}{n!} (x-a)^n$
 $(0 < \theta < 1)$ (拉格朗日余项).

或 $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta_1)(x-a)}{(n-1)!} \cdot (1-\theta_1)^{n-1} (x-a)^n$
 $(0 < \theta_1 < 1)$ (柯西余项).

【1376】 将多项式

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3,$$

按照二项式 $x+1$ 的非负整数幂排列.

解 $P(-1) = 5,$

$$P'(x) = 3 + 10x - 6x^2, \quad P'(-1) = -13,$$

$$P''(x) = 10 - 12x, \quad P''(-1) = 22,$$

$$P'''(x) = -12, \quad P'''(-1) = -12,$$

$$P^{(4)}(x) = 0.$$

由泰勒公式有

$$\begin{aligned} P(x) &= P(-1) + \frac{P'(-1)}{1!} (x+1) + \frac{P''(-1)}{2!} (x+1)^2 \\ &\quad + \frac{P'''(-1)}{3!} (x+1)^3 + \frac{P^{(4)}[-1+\theta(x+1)]}{4!} (x+1)^4 \\ &= 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3. \end{aligned}$$

按照变量 x 的非负整数幂, 写出下列函数的展开式至含有指

定阶数的项(1377 ~ 1387).

【1377】 $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 至含 x^4 的项, 问 $f^{(4)}(0)$ 等于多少?

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{1+x+x^2}{(1-x+x^2)} &= (1+x+x^2) \frac{1+x}{1+x^3} \\ &= (1+x+x^2)(1+x)[1-x^3+o(x^6)] \\ &= 1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4), \\ f^{(4)}(0) &= 4! \cdot (-2) = -48. \end{aligned}$$

【1378】 $\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ 至含 x^2 的项.

$$\text{解} \quad \text{设 } f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}.$$

$$\text{则} \quad f'(x) = \frac{60(1+x)^{99}(1+6x)}{(1-2x)^{41}(1+2x)^{61}},$$

$$f''(x) = \frac{60(1+x)^{98}(65+728x+2196x^2+48x^3)}{(1-2x)^{42}(1+2x)^{62}},$$

$$\text{所以} \quad f(0) = 1, f'(0) = 60, f''(0) = 3900,$$

所以根据泰勒公式有

$$\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}} = 1 + 60x + 1950x^2 + o(x^2).$$

【1379】 $\sqrt[m]{a^m+x}$ ($a > 0$) 至含 x^2 的项.

$$\text{解} \quad \text{设 } f(x) = \sqrt[m]{a^m+x}.$$

$$\text{则} \quad f'(x) = \frac{1}{m}(a^m+x)^{\frac{1-m}{m}},$$

$$f''(x) = \frac{1}{m} \cdot \frac{(1-m)}{m}(a^m+x)^{\frac{1-2m}{m}},$$

$$\text{所以} \quad f(0) = a, f'(0) = \frac{1}{m}a^{1-m},$$

$$f''(0) = \frac{1-m}{m^2}a^{1-2m},$$

$$\text{因此} \quad \sqrt[m]{a^m+x} = a + \frac{1}{ma^{m-1}}x + \frac{(1-m)}{2m^2a^{2m-1}}x^2 + o(x^2).$$

【1380】 $\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x}$ 至含 x^3 的项.

解 设 $f(x) = \sqrt{1-2x+x^2} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$.

则 $f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2-2)(1-2x+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$- \frac{1}{3}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}},$$

$$f''(x) = 3x(1-2x+x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}(3x^2-2)^2(1-2x+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$- \frac{2}{3}(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{9}(2x-3)^2(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}},$$

$$f'''(x) = 3(1-2x+x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x(3x^2-2)(1-2x+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+ \frac{3}{8}(3x^2-2)^3(1-2x+x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$- 3x(3x^2-2)(1-2x+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+ \frac{4}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}$$

$$+ \frac{8}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}$$

$$- \frac{10}{27}(2x-3)^3(1-3x+x^2)^{-\frac{8}{3}},$$

所以 $f(0) = 0, f'(0) = 0$.

$$f''(0) = \frac{1}{3}, f'''(0) = 6.$$

由泰勒公式有

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-2x+x^2} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} \\ &= \frac{1}{6}x^2 + x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

【1381】 e^{2x-x^2} 至含 x^5 的项.

解 e^{2x-x^2}

$$= 1 + (2x-x^2) + \frac{1}{2!}(2x-x^2)^2 + \frac{1}{3!}(2x-x^2)^3$$

$$+ \frac{1}{4!}(2x-x^2)^4 + \frac{1}{5!}(2x-x^2)^5 + o(x^5).$$

$$= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5).$$

【1382】 $\frac{x}{e^x - 1}$ 至含 x^4 的项.

解 当 x 很小时, 令

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \Delta,$$

其中 $\Delta = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$

则 Δ 也很小. 于是

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x - 1} &= \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = \frac{1}{1 + \Delta} \\ &= 1 - \Delta + \Delta^2 - \Delta^3 + \Delta^4 + o(x^4), \end{aligned}$$

而 $\Delta^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{72} + o(x^4),$

$$\Delta^3 = \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$

$$\Delta^4 = \frac{x^4}{16} + o(x^4).$$

所以 $\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4).$

【1383】 $\sqrt[3]{\sin x^3}$ 至含 x^{13} 的项;

解 $\sqrt[3]{\sin x^3}$

$$\begin{aligned} &= \left[x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} + o(x^{15}) \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x \left[1 + \left(-\frac{x^6}{6} + \frac{x^{12}}{120} + o(x^{12}) \right) \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{9} \left(\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12}) \right)^2 + o(x^{12}) \right] \\ &= x - \frac{1}{18}x^7 - \frac{1}{3240}x^{13} + o(x^{13}). \end{aligned}$$

【1384】 $\ln \cos x$ 至含 x^6 的项.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \ln \cos x &= \frac{1}{2} \ln(1 - \sin^2 x) \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} + \frac{\sin^6 x}{3} + o(\sin^6 x) \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right)^4 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right)^6 + o(x^6) \right] \\
 &= -\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{45} x^6 + o(x^6),
 \end{aligned}$$

其中利用

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

即 $o(\sin x) = o(x)$.

【1385】 $\sin(\sin x)$ 至含 x^3 的项.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \sin(\sin x) &= \sin x - \frac{1}{3!} \sin^3 x + o(x^4) \\
 &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right) - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right)^3 + o(x^4) \\
 &= x - \frac{1}{3} x^3 + o(x^4).
 \end{aligned}$$

【1386】 $\tan x$ 至含 x^5 的项.

解 当 x 很小时.

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 + o(x^5),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) = 1 - \Delta,$$

其中 $\Delta = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ 很小, 且

$$\Delta^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5).$$

$$\begin{aligned}
 \text{于是 } \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
 &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6) \right) \frac{1}{1 - \Delta} \\
 &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6) \right) (1 + \Delta + \Delta^2 + o(x^4)) \\
 &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) \right) \\
 &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).
 \end{aligned}$$

【1387】 $\ln \frac{\sin x}{x}$ 至含 x^6 的项.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \ln \frac{\sin x}{x} &= \ln \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)}{x} \\
 &= \ln \left[1 + \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right) \right] \\
 &= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right)^3 + o(x^6) \\
 &= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^6).
 \end{aligned}$$

【1388】 求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 按照差 $(x-1)$ 的非负整数幂展开式的前三项.

$$\text{解 } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}},$$

$$f(1) = 1, f'(1) = \frac{1}{2}, f''(1) = -\frac{1}{4},$$

$$\text{于是 } \sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

【1389】 将函数 $f(x) = x^x - 1$ 按二项式 $(x-1)$ 的非负整数

幕, 展开至含有 $(x-1)^3$ 的项.

$$\begin{aligned}\text{解 } f'(x) &= x^x(1 + \ln x), \\ f''(x) &= x^x(1 + \ln x)^2 + x^{x-1}, \\ f'''(x) &= x^x(1 + \ln x)^3 + 2x^{x-1}(1 + \ln x) \\ &\quad + x^{x-1}\left(\frac{x-1}{x} + \ln x\right), \\ f(1) &= 0, f'(1) = 1, \\ f''(1) &= 2, f'''(1) = 3,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}x^x - 1 &= (x-1) + (x-1)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3).\end{aligned}$$

【1390】 在点 $x=0$ 的邻域中, 用二阶抛物线近似地代替函数 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} (a > 0)$.

$$\begin{aligned}\text{解 } y|_{x=0} &= a, y'|_{x=0} = \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_{x=0} = 0, \\ y''|_{x=0} &= \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a} \Big|_{x=0} = \frac{1}{a},\end{aligned}$$

$$\text{于是 } a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = a + \frac{x^2}{2a} + o(x^2) \approx a + \frac{x^2}{2a}.$$

【1391】 按照分数 $\frac{1}{x}$ 的非负整数幂将函数

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} - x \quad (x > 0),$$

展开到含 $\frac{1}{x^3}$ 的项.

解 由于

$$\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{8} \frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

$$\begin{aligned}\text{所以 } f(x) &= \sqrt{1+x^2} - x = x \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).\end{aligned}$$

【1392】 按照增量 h 的非负整数幂将函数

$$f(h) = \ln(x+h) \quad (x > 0),$$

展开到含 h^n 的项 (n 为自然数).

解 $\ln(x+h)$

$$= \ln\left[x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right] = \ln x + \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= \ln x + \frac{h}{x} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3} \frac{h^3}{x^3} + \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{h^n}{nx^n} + o(h^n).$$

【1393】 假设

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h)$$

$$(0 < \theta < 1),$$

并且 $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta = \frac{1}{n+1}$.

解 按题设

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h),$$

其中 $0 < \theta < 1$. 又因 $f^{(n+1)}(x)$ 存在, 故

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

$$+ \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1}),$$

所以
$$\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1})$$

从而有
$$\theta \cdot \frac{f^{(n)}(x+\theta h) - f^{(n)}(x)}{\theta h}$$

$$= \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) + n! \frac{o(h^{n+1})}{h^{n+1}},$$

注意到
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x+\theta h) - f^{(n)}(x)}{\theta h} = f^{(n+1)}(x) \neq 0.$$

上式两边取极限可得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{\frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x)}{f^{(n+1)}(x)} = \frac{1}{n+1}.$$

【1393.1】 当 $x \rightarrow 0$ 时, 设 $f(x) = 1 + kx + o(x)$, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = e^k.$$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln[f(x)]^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[f(x)]}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + kx + o(x)]}{kx + o(x)} \cdot \frac{kx + o(x)}{x} = k,$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln[f(x)]}{x}} = e^k.$

【1393.2】 假设

$$f(x) \in C^{(2)}[0, 1] \text{ 及 } f(0) = f(1) = 0;$$

并且当 $x \in (0, 1)$ 时 $|f''(x)| \leq A$.

证明: 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}.$

证 设 $x_0 \in [0, 1]$, 则由泰勒公式有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &\quad + \frac{f''(x_0 + \theta(x - x_0))}{2!}(x - x_0)^2, \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta < 1, x \in [0, 1]$.

特别地, 将 $x = 0$ 及 $x = 1$ 分别代入上式得

$$0 = f(0) = f(x_0) - x_0 f'(x_0) + \frac{f''(x_0 - \theta_1 x_0)}{2!} x_0^2, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 0 &= f(1) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(1 - x_0) \\ &\quad + \frac{f''(x_0 + \theta_2(1 - x_0))}{2!}(1 - x_0)^2, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$.

② 式减去 ① 式得

$$f'(x_0) = \frac{1}{2!} [f''(x_0 + \theta_2(1-x_0))(1-x_0)^2 - f''(x_0 - \theta_1 x_0)x_0^2],$$

所以 $|f'(x_0)| \leq \frac{1}{2} A [(1-x_0)^2 + x_0^2] \leq \frac{A}{2}.$

【1393. 3】 假设

$$f(x) (-\infty < x < +\infty),$$

是可微分二次的函数, 且

$$M_k = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f^{(k)}(x)| < +\infty \quad (k = 0, 1, 2),$$

证明: 不等式 $M_1^2 \leq 2M_0M_2.$

证 由泰勒公式对任何 h 有

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi_1)}{2}h^2, \quad ①$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(\xi_2)}{2}h^2, \quad ②$$

其中 ξ_1 位于 x 与 $x+h$ 之间, ξ_2 位于 x 与 $x-h$ 之间

①式减②式得

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x-h) &= 2f'(x)h + \frac{h^2}{2}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)], \\ \text{即 } 2f'(x)h &= f(x+h) - f(x-h) \\ &\quad - \frac{h^2}{2}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)]. \end{aligned}$$

所以 $2h |f'(x)| \leq |2hf'(x)|$
 $\leq |f(x+h)| + |f(x-h)|$
 $+ \frac{h^2}{2} [|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|]$
 $\leq 2M_0 + h^2M_2,$

即 $M_2h^2 - 2|f'(x)|h + 2M_0 \geq 0,$

上式对任何 h 都成立, 故左边二次式的判别式必小于等于零.

即 $4|f'(x)|^2 - 4M_2(2M_0) \leq 0,$

即 $|f'(x_0)| \leq 2M_0M_2.$

由 x 的任意性有 $M_1 \leq 2M_0M_2$.

【1394】 估计下列似公式的绝对误差:

$$(1) e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad \text{当 } 0 \leq x \leq 1;$$

$$(2) \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad \text{当 } |x| \leq \frac{1}{2};$$

$$(3) \tan x \approx x + \frac{x^3}{3} \quad \text{当 } |x| \leq 0.1;$$

$$(4) \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad \text{当 } 0 \leq x \leq 1.$$

解 用拉格朗日余项公式估计误差:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

(1) 由 $f(x) = e^x$ 及 $0 \leq x \leq 1$ 得

$$f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x} < e \quad (0 < \theta < 1).$$

于是当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{e}{(n+1)!} |x|^{n+1} < \frac{e}{(n+1)!}.$$

(2) 由 $f(x) = \sin x$ 得

$$|f^{(5)}(\theta x)| = \left| \sin\left(\theta x + \frac{5\pi}{2}\right) \right| \leq 1.$$

于是当 $|x| \leq \frac{1}{2}$ 时,

$$|R_4(x)| \leq \frac{1}{5!} |x|^5 \leq \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{3840}.$$

(3) 由 $f(x) = \tan x$ 得

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^2 x},$$

$$f'''(x) = \frac{6}{\cos^4 x} - \frac{4}{\cos^2 x},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24\sin x}{\cos^5 x} - \frac{8\sin x}{\cos^3 x},$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{16}{\cos^2 x} + \frac{120\sin^2 x}{\cos^6 x},$$

注意到 $f'(0) = 1, f''(0) = 0,$

$$f'''(0) = 2, f^{(4)}(0) = 0.$$

当 $|x| \leq 0.1$ 时 $|\sin x| \leq |x| \leq 0.1,$

$$\cos^2 x \geq \cos^2 0.1 = |1 - \sin^2 0| > 0.99,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |R_5(x)| &= \left| \frac{f^{(5)}(\theta x)}{5!} x^5 \right| \\ &\leq \frac{0.1^5}{5!} \left(\frac{16}{0.99} + \frac{120 \times 0.1^2}{0.99^3} \right) \\ &< 2 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

(4) 由 $f(x) = \sqrt{1+x}$ 及 $0 \leq x \leq 1$ 得

$$|f'''(x)| = \frac{3}{8} \left| \frac{1}{(1+x)^{\frac{5}{2}}} \right| \leq \frac{3}{8},$$

$$\text{于是 } |R_3(x)| \leq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{1}{16} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

【1395】 近似公式 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ 对于怎样的 x 可以精确到 0.0001.

$$\text{解 误差 } |\Delta| \leq \frac{|x|^4}{4!},$$

$$\text{按题设需 } \frac{|x|^4}{4!} < 0.0001,$$

$$\text{于是 } |x| < 0.22 (\text{弧度}).$$

【1395.1】 证明公式

$$\sqrt[n]{a^n + x} = a + \frac{x}{na^{n-1}} - r, (n \geq 2, a > 0, x > 0),$$

$$0 < r < \frac{n-1}{2n^2} \cdot \frac{x^2}{2n-1}.$$

证 设 $f(x) = \sqrt[n]{a^n + x}$ ($n \geq 2, a > 0, x \geq 0$),

$$\text{则 } f'(x) = \frac{1}{n} (a^n + x)^{\frac{1-n}{n}},$$

$$f''(x) = -\frac{n-1}{n^2} (a^n + x)^{\frac{1-2n}{n}},$$

$$f(0) = a, f'(0) = \frac{1}{na^{n-1}}.$$

由拉格朗日余项公式

$$\begin{aligned} \text{有} \quad f(x) &= f(0) + f'(0)x + R_2(x) \\ &= a + \frac{x}{na^{n-1}} + R_2(x), \end{aligned}$$

$$\text{其中} \quad R_2(x) = -\frac{1}{2!} \frac{n-1}{n^2} (a^n + \theta x)^{\frac{1-2n}{n}} x^2, (0 < \theta < 1),$$

$$\text{记} \quad r = -R_2(x) = \frac{1}{2!} \frac{n-1}{n^2} (a^n + \theta x)^{\frac{1-2n}{n}} x^2.$$

显然 $r > 0$, 而 $(a^n + \theta x)^{\frac{2n-1}{n}} > a^{2n-1}$,

$$\text{所以} \quad 0 < r < \frac{n-1}{2n^2} \cdot \frac{x^2}{a^{2n-1}}.$$

$$\text{注: 原题误为 } 0 < r < \frac{n-1}{2n^2} \cdot \frac{x^2}{2n-1},$$

事实上这是不成立的, 例如, 取 a 充分小, $0 < x \leq a^n$, 则

$$(a^n + \theta x)^{\frac{2n-1}{n}} < 2^{\frac{2n-1}{n}} \cdot a^{2n-1} < 2a^{2n-1},$$

$$\text{则} \quad r > \frac{n-1}{2n^2} \cdot \frac{x^2}{2a^{2n-1}}.$$

当 a 取得充分小, 将会有 $\frac{1}{2a^{2n-1}} > \frac{1}{2n-1}$ 这说明原题的结论是错误的.

【1396】 运用泰勒公式近似地计算:

- (1) $\sqrt[3]{30}$; (2) $\sqrt[5]{250}$; (3) $\sqrt[12]{4000}$;
 (4) \sqrt{e} ; (5) $\sin 18^\circ$; (6) $\ln 1.2$;
 (7) $\arctan 0.8$; (8) $\arcsin 0.45$; (9) $(1.1)^{1.2}$;

并估计误差.

解 (1) $\sqrt[3]{30}$

$$\begin{aligned} &= 3 \left(1 + \frac{1}{9} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\approx 3 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right)}{2!} \left(\frac{1}{9} \right)^2 \right] \approx 3.1072, \end{aligned}$$

$$\Delta < 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^3 \approx 2.54 \times 10^{-4}.$$

$$\begin{aligned} (2) \sqrt[5]{250} &= 3 \left(1 + \frac{7}{243}\right)^{\frac{1}{5}} \\ &\approx 3 \left[1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{243} + \frac{\frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} - 1\right)}{2!} \left(\frac{7}{243}\right)^2 \right] \\ &\approx 3.0171, \end{aligned}$$

$$\Delta < 3 \times \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5} \left(\frac{7}{243}\right)^3 \approx 4.8 \times 10^{-6}.$$

$$\begin{aligned} (3) \sqrt[12]{4000} &= 2 \left(1 - \frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{12}} \\ &\approx 2 \left(1 - \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{128}\right) \approx 1.9960, \end{aligned}$$

$$\Delta < 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \left(\frac{3}{128}\right)^2 \approx 8.4 \times 10^{-5}.$$

$$\begin{aligned} (4) \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} &\approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &\quad + \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{6!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \approx 1.64872, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{7!} \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \frac{1}{8!} \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \dots \\ &< \frac{1}{7!} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \frac{1}{1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}} \approx 1.6 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

$$(5) \sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^5 \approx 0.309017,$$

$$\Delta < \frac{1}{7!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^7 \approx 6 \times 10^{-8}.$$

$$(6) \ln 1.2 = \ln(1 + 0.2)$$

$$\begin{aligned} &\approx 0.2 - \frac{1}{2} (0.2)^2 + \frac{1}{3} (0.2)^3 - \frac{1}{4} (0.2)^4 \\ &\quad + \frac{1}{5} (0.2)^5 - \frac{1}{6} (0.2)^6 + \frac{1}{7} (0.2)^7 \end{aligned}$$

$$\approx 0.182321,$$

$$\Delta < \frac{1}{8}(0.2)^8 \approx 3.2 \times 10^{-7}.$$

$$\begin{aligned} (7) \arctan 0.8 &\approx 0.8 - \frac{1}{3}(0.8)^3 + \frac{1}{5}(0.8)^5 \\ &\quad - \frac{1}{7}(0.8)^7 + \cdots - \frac{1}{39}(0.8)^{39} \\ &\approx 0.67474(\text{弧度}), \end{aligned}$$

$$\Delta < \frac{1}{41}(0.8)^{41} \approx 2.6 \times 10^{-6}.$$

$$(8) \arcsin 0.45$$

$$\begin{aligned} &\approx 0.45 + \frac{1}{2 \cdot 3}(0.45)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}(0.45)^5 + \cdots \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 13}(0.45)^{13} \\ &\approx 0.46676(\text{弧度}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15}(0.45)^{15} \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdots 15}{2 \cdot 4 \cdots 16 \cdot 17}(0.45)^{17} + \cdots \\ &< \frac{1}{15}(0.45)^{15} \frac{1}{1 - (0.45)^2} \approx 5.25 \times 10^{-7}. \end{aligned}$$

$$(9) \text{ 先计算 } \ln 1.1.$$

$$\begin{aligned} \ln 1.1 &= \ln(1 + 0.1) \\ &= 0.1 - \frac{0.1^2}{2} + \cdots + \frac{(0.1)^5}{5} \approx 0.0953, \end{aligned}$$

$$(1.1)^{1.2} = e^{1.2 \ln 1.1} \approx e^{1.2 \times 0.0953} \approx 1.12117,$$

$$\Delta = \frac{1}{4!} e^{1.2 \times 0.0953} (0.0953 \times 1.2)^4 < 7.9 \times 10^{-6}.$$

【1397】 计算:

$$(1) e \text{ 准确到 } 10^{-9}; \quad (2) \sin 1^\circ \text{ 准确到 } 10^{-8};$$

$$(3) \cos 9^\circ \text{ 准确到 } 10^{-5}; \quad (4) \sqrt{5} \text{ 准确到 } 10^{-4};$$

$$(5) \lg 11 \text{ 准确到 } 10^{-5}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } (1) \Delta &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \\
 &< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+1)} + \cdots \right) \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n},
 \end{aligned}$$

要使 $\Delta < 10^{-9}$, 只需 $n!n > 10^9$, 取 $n = 11$ 即可, 于是

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{11!} \approx 2.718281828.$$

$$(2) \Delta < \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^{2n+1},$$

要 $\Delta < 10^{-8}$, 只要

$$\frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^{2n+1} < 10^{-8},$$

只须 $n > 2$ 于是

$$\sin 1^\circ \approx \frac{\pi}{180} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^3 \approx 0.01745241.$$

$$(3) \Delta < \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^{2n},$$

要 $\Delta < 10^{-5}$, 只须

$$\frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^{2n} < 10^{-5},$$

只须取 $n \geq 3$, 于是

$$\cos 9^\circ \approx 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^4 \approx 0.98769.$$

$$(4) \sqrt{5} = 2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}},$$

$$\Delta < 2 \cdot \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1}.$$

要 $\Delta < 10^{-4}$, 只需

$$2 \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} < 10^{-4},$$

只需 $n \geq 4$, 于是

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &\approx 2 \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1 \cdot 1}{2! 2^2} \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{3! 2^3} \left(\frac{1}{4} \right)^3 \right] \\ &\approx 2.2361\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5) \lg 11 &= 1 + \lg(1 + 0.1) \\ &= 1 + \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln(1 + 0.1)\end{aligned}$$

$$\Delta < \frac{1}{n+1} (0.1)^{n+1},$$

要使 $\Delta < 10^{-5}$, 只要

$$\frac{1}{n+1} (0.1)^{n+1} < 10^{-5},$$

取 $n \geq 4$ 即可, 于是

$$\begin{aligned}\lg 11 &\approx 1 + \left[0.1 - \frac{1}{2} (0.1)^2 + \frac{1}{3} (0.1)^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} (0.1)^4 \right] \frac{1}{\ln 10} \approx 1.04139.\end{aligned}$$

利用五个基本展开式, 求下列极限 (1398 ~ 1409).

$$\text{【1398】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right] - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right]}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4} \right) x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

$$\text{【1399】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right] \left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right] - x - x^2}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

【1400】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - 2 \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} - \frac{1}{16x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) - 2 \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{4} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = -\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

【1401】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}} - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{3} + x \cdot o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

【1402】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right].$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right]$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \right. \\
 &\quad \left. - x^3 \left(1 + \frac{1}{2x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right) \right]
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6} + o(1) \right) = \frac{1}{6},$$

其中 $o(1)$ 表示当 $x \rightarrow +\infty$ 时为无穷小量.

$$\text{【1403】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} + e^{-x \ln a} - 2}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left[\left(1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2) \right) - 2 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [\ln^2 a + o(1)] = \ln^2 a \quad (a > 0). \end{aligned}$$

$$\text{【1404】} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right].$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} + o(1) \right] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{【1405】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x \left[1 - \left(\frac{x^2}{3!} + o(x^2) \right) \right]} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \left[1 + \frac{x^2}{3!} + o(x^2) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x}{3!} + o(x) \right) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{【1406】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\frac{1}{x} - \frac{1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)}{x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3) \right) \left(1 + \frac{1}{3!}x^2 + o(x^4) \right) \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3) \right) \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{3} + o(1) \right] = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\text{【1406. 1】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x \sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x \sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \frac{1}{3!}\sin^3 x + \frac{1}{5!}\sin^5 x + o(\sin^5 x) - x \left[1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2!}\frac{2}{3^2}x^4 + o(x^5) \right]}{x^5} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5} \left\{ \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5) \right) - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5) \right)^3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{5!} \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5) \right)^5 + o(x^5) - \left[x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^5 + o(x^6) \right] \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5) \right] - \left[x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^5 + o(x^6) \right]}{x^5} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{19}{90}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \frac{19}{90}.
 \end{aligned}$$

$$\text{【1406. 2】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\sin x \ln \cos x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\frac{1}{2} \sin x \ln \cos^2 x}}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\frac{1}{2} \sin x \ln(1 - \sin^2 x)}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\frac{1}{2} \sin^3 x + o(\sin^3 x)}}{x^3}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left[1 + \frac{1}{2} \sin^3 x + o(x^3) \right]}{x^3} = -\frac{1}{2}.$$

【1406. 3】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(\tan x) - x}{x^3}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(\tan x - x)}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + \frac{1}{3!} \tan^3 x + o(\tan^4 x) - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} \tan^3 x + o(x^4)}{x^3}$$

$$= \frac{1}{6} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3 \cos x}$$

$$= \frac{1}{6} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{1}{3!} x^3 + o(x^4) \right) - x \left(1 - \frac{1}{2!} x^2 + o(x^3) \right)}{x^3}$$

$$= \frac{1}{6} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 求出无穷小的量 y 的求出形如 Cx^n (C 为常数) 的主项, (1407 ~ 1409).

【1407】 设 $y = \tan(\sin x) - \sin(\tan x).$

解 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7),$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{35} + o(x^7),$$

所以 $y = \tan(\sin x) - \sin(\tan x)$

$$= \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{2}{15} \sin^5 x + \frac{1}{35} \sin^7 x + o(\sin^7 x) \right)$$

$$- \left(\tan x - \frac{1}{3!} \tan^3 x + \frac{1}{5!} \tan^5 x - \frac{1}{7!} \tan^7 x + o(\tan^7 x) \right)$$

$$= \left[\left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + o(x^7) \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + o(x^7) \right)^3 \\
& + \frac{2}{15} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + o(x^7) \right)^5 \\
& + \frac{1}{315} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7) \right)^7 + o(x^7) \Big] \\
& - \left[\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{35} + o(x^7) \right) \right. \\
& - \frac{1}{3!} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{35} + o(x^7) \right)^3 \\
& + \frac{1}{5!} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{35} + o(x^7) \right)^5 \\
& \left. - \frac{1}{7!} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{35} + o(x^7) \right)^7 + o(x^7) \right] \\
& = \frac{x^7}{30} + o(x^7),
\end{aligned}$$

故 y 的主项为 $\frac{x^7}{30}$.

【1408】 $y = (1+x)^x - 1$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } y &= e^{x \ln(1+x)} - 1 = e^{x \left[x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right]} - 1 \\
&= e^{x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)} - 1 \\
&= 1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \right] \\
&\quad + o \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \right) - 1 \\
&= x^2 + o(x^2),
\end{aligned}$$

故 y 的主项为 x^2 .

【1409】 $y = 1 + \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } y &= 1 - \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} = 1 - e^{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1} \\
&= 1 - e^{\frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - 1} = 1 - e^{-\frac{x}{2} + o(x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \left[1 + \left(-\frac{x}{2} + o(x) \right) + o\left(-\frac{x}{2} + o(x) \right) \right] \\
 &= \frac{x}{2} + o(x),
 \end{aligned}$$

故 y 的主项为 $\frac{x}{2}$.

【1410】 怎样选择系数 a 和 b , 使 $x - (a + b\cos x)\sin x$ 对于 x 是 5 阶无穷小?

解 $x - (a + b\cos x)\sin x$

$$= x - a\sin x - \frac{b}{2}\sin 2x$$

$$= x - a\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right]$$

$$- \frac{b}{2}\left[2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + \frac{1}{5!}(2x)^5 + o(x^5) \right]$$

$$= (1 - a - b)x + \left(\frac{a}{6} + \frac{2b}{3} \right)x^3 - \left(\frac{a}{120} + \frac{2b}{15} \right)x^5 + o(x^5),$$

故要使此量为 x 的 5 阶无穷小, 当且仅当

$$\begin{cases} 1 - a - b = 0, \\ \frac{a}{6} + \frac{2b}{3} = 0, \end{cases}$$

解之得 $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$.

【1410. 1】 怎样选择系数 A 和 B , 使得当 $x \rightarrow 0$ 时成立渐近等式 $\cot x = \frac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} + o(x^5)$.

解 因为

$$\begin{aligned}
 \cot x - \frac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} &= \frac{(x + Bx^3)\cos x - (1 + Ax^2)\sin x}{(x + Bx^3)\sin x},
 \end{aligned}$$

要使 $\cot x - \frac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} = o(x^5)$.

当且仅当

$$\begin{aligned}
 & (x + Bx^3)\cos x - (1 + Ax^2)\sin x = o(x^7), \\
 \text{而} \quad & (x + Bx^3)\cos x - (1 + Ax^2)\sin x \\
 &= (x + Bx^3)\left[x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^6)\right] \\
 &\quad - (1 + Ax^2)\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^7)\right] \\
 &= \left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + B - A\right)x^3 \\
 &\quad + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2!}B - \frac{1}{5!} + \frac{1}{3!}A\right)x^5 + o(x^7),
 \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + B - A = 0, \\ \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{2!}B + \frac{1}{3!}A = 0. \end{cases}$$

$$\text{解之得} \quad A = -\frac{2}{5}, B = -\frac{1}{15},$$

$$\text{故当 } A = -\frac{2}{5}, B = -\frac{1}{15} \text{ 时,}$$

$$\cot x = \frac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} + o(x^5).$$

【1410. 2】 当 $x \rightarrow 0$ 时, 怎样的系数 A, B, C 和 D 使得渐近公式 $e^x = \frac{1 + Ax + Bx^2}{1 + Cx + Dx^2} + o(x^5)$ 成立.

解 因为

$$\begin{aligned}
 e^x &= \frac{1 + Ax + Bx^2}{1 + Cx + Dx^2} \\
 &= \frac{e^x(1 + Cx + Dx^2) - (1 + Ax + Bx^2)}{1 + Cx + Dx^2} \\
 &\sim e^x(1 + Cx + Dx^2) - (1 + Ax + Bx^2),
 \end{aligned}$$

$$\text{故要使} \quad e^x = \frac{1 + Ax + Bx^2}{1 + Cx + Dx^2} + o(x^5),$$

$$\text{必须} \quad e^x(1 + Cx + Dx^2) - (1 + Ax + Bx^2) = o(x^5),$$

$$\text{而} \quad e^x(1 + Cx + Dx^2) - (1 + Ax + Bx^2)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5) \right] (1 + Cx + Dx^2) - (1 + Ax + Bx^2) \\
&= (1 - C - A)x + \left(\frac{1}{2!} + C + D - B \right)x^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}C + D \right)x^3 + \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{3!}C + \frac{1}{2!}D \right)x^4 + o(x^5),
\end{aligned}$$

因此,有

$$\begin{cases} C - A + 1 = 0, \\ C + D - B + \frac{1}{2} = 0, \\ \frac{1}{6}C + \frac{1}{2}D + \frac{1}{24} = 0, \\ \frac{1}{2}C + D + \frac{1}{6} = 0. \end{cases}$$

解之得 $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{12}, C = -\frac{1}{2}, D = \frac{1}{12}$.

因此,当 $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{12}, C = -\frac{1}{2}, D = \frac{1}{12}$ 时,

$$e^x = \frac{1 + Ax + Bx^2}{1 + Cx + Dx^2} + o(x^5).$$

【1411】 设 $|x|$ 为小量,推导下列各式的简单近似公式:

(1) $\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2} \quad (R > 0);$

(2) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}};$

(3) $\frac{A}{x} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{100} \right)^{-n} \right];$

(4) $\frac{\ln 2}{\ln \left(1 + \frac{x}{100} \right)}.$

解 (1) $\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2} = \frac{1}{R^2} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{R} \right)^{-2} \right]$
 $\approx \frac{1}{R^2} \left[1 - \left(1 - \frac{2x}{R} \right) \right] = \frac{2x}{R^3}.$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \\
 &= \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1 - \frac{2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}} \\
 &\approx \left[1 + \frac{2x}{3(1-x)}\right] - \left[1 - \frac{2x}{3(1+x)}\right] \\
 &= \frac{4x}{3(1-x^2)} \approx \frac{4}{3}x.
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{A}{x} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{-n}\right] \approx \frac{A}{x} \left[1 - \left(1 - \frac{nx}{100}\right)\right] = \frac{nA}{100}.$$

$$(4) \quad \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{x}{100}\right)} \approx \frac{\ln 2}{\frac{x}{100}} = \frac{100 \ln 2}{x} \approx \frac{70}{x}.$$

【1412】 设 x 的绝对值为无穷小量, 推导出形如 $x = \alpha \sin x + \beta \tan x$ 的近似公式, 并且精确到 x^5 项.

将这一公式用于小角度值的弧长的近似求法.

解 $\alpha \sin x + \beta \tan x$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha \left[x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right] \\
 &\quad + \beta \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \right] \\
 &= (\alpha + \beta)x - \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3} \right)x^3 - \left(\frac{\alpha}{120} + \frac{2\beta}{15} \right)x^5 + o(x^5)
 \end{aligned}$$

要使近似公式 $x = \alpha \sin x + \beta \tan x$ 准确到 x^5 项, 当且仅当

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3} = 0, \end{cases}$$

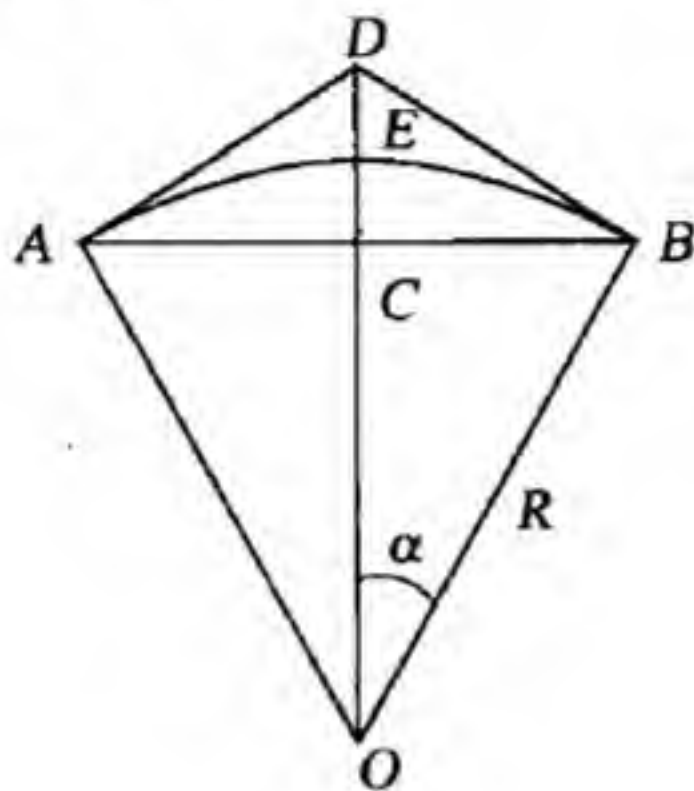
解之得 $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}$, 于是近似公式为

$$x \approx \frac{2}{3} \sin x + \frac{1}{3} \tan x.$$

弧长 = 中心角 \times 半径, 设中心角为 x , 半径为 R , 则弧长 $= Rx \approx \frac{2R}{3} \sin x + \frac{R}{3} \tan x$, 此即小角度的弧长的近似公式.

【1413】 估计切贝绍夫法则的相对误差:圆弧近似地等于等腰三角形两腰的和,此等腰三角形立于该圆弧的弦上,且高为此弓形之矢的 $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

解 如 1413 题图所示



1413 题图

$$BC = R \sin \alpha,$$

$$BC^2 = R^2 \sin^2 \alpha = \frac{R^2}{2} (1 - \cos 2\alpha),$$

$$DC = \sqrt{\frac{4}{3}} EC = \sqrt{\frac{4}{3}} R (1 - \cos \alpha),$$

$$\begin{aligned} DC^2 &= \frac{4}{3} R^2 (1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= R^2 \left(2 - \frac{8}{3} \cos \alpha + \frac{2}{3} \cos 2\alpha \right), \end{aligned}$$

于是 $BD^2 = BC^2 + DC^2$

$$\begin{aligned} &= R^2 \left(\frac{5}{2} - \frac{8}{3} \cos \alpha + \frac{1}{6} \cos 2\alpha \right) \\ &= R^2 \left\{ \frac{5}{2} - \frac{8}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{24} \alpha^4 - \frac{1}{720} \alpha^6 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \left(1 - 2\alpha^2 + \frac{2}{3} \alpha^4 - \frac{4}{45} \alpha^6 \right) \right\} + o(\alpha^7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= R^2 \left(\alpha^2 - \frac{1}{90} \alpha^6 \right) + o(\alpha^7) \\
 &= R^2 \alpha^2 \left[1 - \frac{1}{90} \alpha^4 + o(\alpha^5) \right] = R^2 \alpha^2 (1 - \Delta),
 \end{aligned}$$

其中 $\Delta = \frac{1}{90} \alpha^4 + o(\alpha^5),$

$$\begin{aligned}
 BD &= R\alpha \sqrt{1 - \Delta} = R\alpha \left[1 - \frac{1}{2} \Delta + o(\Delta^2) \right] \\
 &= R\alpha \left[1 - \frac{1}{180} \alpha^4 + o(\alpha^5) \right].
 \end{aligned}$$

从而 $|\widehat{BE} - BD| = \left| R\alpha - R\alpha \left(1 - \frac{\alpha^4}{180} + o(\alpha^5) \right) \right|$

$$= \frac{R}{180} \alpha^5 + o(\alpha^6),$$

因此, 所求的相对误差为

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\widehat{AB} - (AD + BD)}{\widehat{AB}} \right| &= \left| \frac{2\widehat{BE} - 2BD}{2\widehat{BE}} \right| \\
 &= \frac{|\widehat{BE} - BD|}{|\widehat{BE}|} = \frac{\frac{R}{180} \alpha^5 + o(\alpha^6)}{\alpha R} = \frac{\alpha^4}{180} + o(\alpha^5).
 \end{aligned}$$

§ 11. 函数的极值, 最大值和最小值

1. 极值的必要条件

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的双侧邻域中有定义, 并且对于某域: $0 < |x - x_0| < \delta$ 内的所有点 x , 有下列不等式成立:

$$f(x) < f(x_0) \text{ 或 } f(x) > f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值(极大值或极小值).

如果存在极值点 x_0 且 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f'(x_0) = 0$.

2. 极值的充分条件

第一法则 如果(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $|x - x_0| < \delta$ 内有定义并且是连续的, 且 $f'(x_0) = 0$ 或不存在

(临界点);

(2) $f(x)$ 在 $0 < |x - x_0| < \delta$ 域内具有有限的导数 $f'(x)$;

(3) 导数 $f'(x)$ 在 x_0 的左侧与右侧有固定的符号, 则函数 $f(x)$ 的性质用下表表示:

	导数的符号		结论
	$x < x_0$	$x > x_0$	
I	+	+	无极值
II	+	-	极大值
III	-	+	极小值
IV	-	-	无极值

第二法则 如果函数 $f(x)$ 有二阶导数 $f''(x)$ 且在点 x_0 有下列条件成立:

$$f'(x_0) = 0 \text{ 且 } f''(x_0) \neq 0,$$

则函数 $f(x)$ 在此点有极值, 也就是说: 当 $f''(x_0) < 0$ 时, 有极大值; 而当 $f''(x_0) > 0$ 时, 有极小值.

第三法则 假设函数 $f(x)$ 在某区间 $|x - x_0| < \delta$ 内有导数 $f'(x) \cdots, f^{(n-1)}(x)$, 并且在点 x_0 有导数 $f^{(n)}(x_0)$, 而且

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = 1 \cdots, n-1),$$

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0;$$

在这种情况下: (1) 如果 n 为偶数, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极值, 也就是说: 当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时, 有极大值, 当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时, 有极小值;

(2) 如果 n 为奇数, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无极值.

3. 绝对极值

在闭区间 $[a, b]$ 上, 或在其临界点 (即导数 $f'(x)$ 等于零或不存在), 或者在该区间的边界点 a 和 b , 连续函数 $f(x)$ 达到其最大 (最小) 值.

研究下列函数的极值 (1414 ~ 1422).

【1414】 $y = 2 + x - x^2$;

解 $y' = 1 - 2x$, 令 $y' = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}$.

由于 $y'' = -2 < 0$, 所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时函数取极大值

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}.$$

【1415】 $y = (x-1)^3$;

解 因为 $y' = 3(x-1)^2 > 0$ ($x \neq 1$).

所以函数在 $(-\infty, +\infty)$ 始终单调上升, 故函数 y 无极值.

【1416】 $y = (x-1)^4$;

解 $y' = 4(x-1)^3$, 令 $y' = 0$, 得 $x = 1$,

当 $x < 1$ 时, $y' < 0$, 函数单调减小,

当 $x > 1$ 时, $y' > 0$, 函数单调增加.

所以, 当 $x = 1$ 时, 函数取极小值 $y = 0$.

【1417】 $y = x^m(1-x)^n$ (m 和 n 为正整数);

解 $y' = x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m - (m+n)x]$.

令 $y' = 0$, 得

$$x = 0, x = 1, x = \frac{m}{m+n}.$$

(1) 若 m 为偶数, 则

当 $0 < x < \frac{m}{m+n}$ 时, $y' > 0$;

当 $x < 0$ 时, $y' < 0$;

所以, 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 0$.

(2) 若 m 为奇数, 则 y' 在 $x = 0$ 的附近不变号, 故无极值.

(3) 当 $0 < x < \frac{m}{m+n}$ 时, $y' > 0$;

当 $\frac{m}{m+n} < x < 1$ 时, $y' < 0$;

所以函数 y 在 $x = \frac{m}{m+n}$ 处有极大值 $y = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$.

(4) 同理, 若 n 为偶数, 则函数在 $x = 1$ 处有极小值 $y = 0$

若 n 为奇数, 则当 $x = 1$ 时函数无极值.

【1418】 $y = \cos x + \operatorname{ch} x$;

解 $y' = -\sin x + \operatorname{sh} x$.

令 $y' = 0$, 得 $x = 0$,

由于 $y'' = -\cos x + \operatorname{ch} x, y''(0) = 0$,

$y''' = \sin x + \operatorname{sh} x, y'''(0) = 0$,

$y^{(4)} = \cos x + \operatorname{ch} x, y^{(4)}(0) = 2 > 0$.

所以当 $x = 0$ 时, 函数有极小值 $y = 2$.

【1419】 $y = (x+1)^{10} e^{-x}$;

解 $y' = e^{-x}(x+1)^9(9-x)$.

令 $y' = 0$, 得 $x = -1$ 及 $x = 9$,

当 $x < -1$ 时, $y' < 0$;

当 $-1 < x < 9$ 时, $y' > 0$;

当 $x > 9$ 时, $y' < 0$;

所以, 当 $x = -1$ 时, 函数有极小值 $y = 0$.

当 $x = 9$ 时, 函数有极大值 $y = 10^{10} e^{-9}$.

【1420】 $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$ (n 为自然数);

解 $y' = -\frac{1}{n!} e^{-x} x^n$.

令 $y' = 0$, 得 $x = 0$.

(1) 若 n 为偶数, 由于 $y' < 0 (x \neq 0)$, 故函数无极值.

(2) 若 n 为奇数, 则

当 $x < 0$ 时, $y' > 0$,

当 $x > 0$ 时, $y' < 0$,

所以, 当 $x = 0$ 时, 函数有极大值 $y = 1$.

【1421】 $y = |x|$;

解 $y|_{x=0} = 0$,

而当 $x \neq 0$ 时, 恒有 $y = |x| > 0$,

所以, 当 $x = 0$ 时, 函数有极小值 $y = 0$.

【1422】 $y = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}};$

解 $y' = \frac{1-3x}{3\sqrt[3]{x^2(1-x)}}.$

令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{3}.$

且 y' 在 $x = 0$ 处及 $x = 1$ 处不存在.

当 $x < 0$ 时, $y' > 0;$

当 $0 < x < \frac{1}{3}$ 时, $y' > 0;$

当 $\frac{1}{3} < x < 1$ 时, $y' < 0;$

当 $x > 1$ 时, $y' > 0.$

所以当 $x = 0$ 时, 函数无极值, 当 $x = \frac{1}{3}$ 时, 函数有极大值 $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{4}.$

当 $x = 1$ 时, 函数有极小值 $y = 0.$

【1423】 研究函数 $f(x) = (x-x_0)^n\varphi(x)$ 在点 $x = x_0$ 的极值, (n 为自然数), 其中当 $x = x_0$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 连续且 $\varphi(x_0) \neq 0.$

解 由于 $\varphi(x)$ 在 x_0 点连续, 且 $\varphi(x_0) \neq 0.$ 所以存在 x_0 的一个邻域 $N_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 使得 $\varphi(x)$ 在 $N_\delta(x_0)$ 内与 $\varphi(x_0)$ 同号. 又 $f(x_0) = 0.$

(1) 若 n 为奇数, 则经过 x_0 点时, 函数 $f(x)$ 的值改变符号, 所以在 $x = x_0$ 处没有极值.

(2) 若 n 为偶数, 则

$$(x-x_0)^n > 0 \quad (x \neq x_0).$$

因而当 $\varphi(x_0) > 0$ 时,

$$f(x) > f(x_0) = 0 \quad (0 < |x-x_0| < \delta),$$

所以, 当 $x = x_0$ 时有极小值 $f(x_0) = 0.$

当 $\varphi(x_0) < 0$ 时, 则

$$f(x) < f(x_0) = 0, (0 < |x-x_0| < \delta),$$

所以,当 $x = x_0$ 时,有极大值 $f(x_0) = 0$.

【1424】 假设 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $f'(x) = \frac{P_1(x)}{Q^2(x)}$ 且 x_0 为函数 $f(x)$ 的驻点,即 $P_1(x_0) = 0, Q(x_0) \neq 0$.

证明: $\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P'_1(x_0)$.

证 因为

$$f''(x) = \frac{P'_1(x)Q^2(x) - 2Q(x)Q'(x)P_1(x)}{Q^4(x)},$$

于是 $f''(x_0) = \frac{P'_1(x_0)}{Q^2(x_0)}$.

由于 $Q^2(x_0) > 0$, 所以有

$$\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P'_1(x_0).$$

【1425】 能否断定:如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极大值,则在此点某充分小的邻域内,函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧递增,而右侧是递减?

研究例子:若 $x \neq 0, f(x) = 2 - x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right); f(0) = 2$.

解 不能断定. 例如,函数

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时,} \\ 2, & \text{当 } x = 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

则当 $x \neq 0$ 时有

$$f(x) - f(0) = -x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) < 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点有极大值 $f(0) = 2$. 但

$$f'(x) = \cos \frac{1}{x} - 2x \left(1 + \sin \frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0).$$

故在 $x = 0$ 的任意小邻域内 $f'(x)$ 都时正时负,故在 $x = 0$ 的左侧或右侧的任意小邻域内 $f(x)$ 都是振荡的.

【1426】 放
$$f(x) = \begin{cases} e - \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} xe - \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

证明: (1) $f(x)$ 在 $x=0$ 外有最小值;

(2) $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0 (n=1, 2, \dots)$, 但 $g(x)$ 在 $x=0$ 处无极值.

作为这些函数的图形.

证 根据 1225 题的结果有

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

用归纳法可证明

$$g^{(n)}(0) = 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

当 $x \neq 0$ 时,

$$g'(x) = \left(\frac{2}{x^2} + 1\right)e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

我们指出对任何自然数 n , 均有

$$g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0),$$

其中 $P_n(t)$ 是关于 t 的多项式. 我们用数学归纳法证明:

当 $n=1$ 时, 命题显然. 设当 $n=k$ 时,

$$g^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

其中 $P_k(t)$ 是关于 t 的多项式.

则
$$\begin{aligned} g^{(k+1)}(x) &= \left[P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right]' \\ &= \left[P_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{2}{x^3} + P'_k\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, \end{aligned}$$

其中 $P_{k+1}(t)$ 是关于 t 的多项式.

因此, 由数学归纳法, 命题得证.

再用数学归纳法证明

$$g^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

事实上 $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$

假设当 $n = k$ 时, $g^{(k)}(0) = 0$, 则

$$\begin{aligned} g^{(k+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}P_k\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0, \end{aligned}$$

因此, 对任何自然数 n , 都有 $g^{(n)}(0) = 0$.

又 $f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0).$

当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$,
所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取极小值 $f(0) = 0$, 而

$$g'(x) = \frac{2}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0),$$

所以 $g'(x) > 0 (x \neq 0)$. 因此 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内严格单调上升, 所以 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处不取极值.

又 $f''(x) = \frac{4 - 6x^2}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}},$

令 $f''(x) = 0$ 得曲线的拐点为 $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. $f(x)$ 为偶函数, $y = 1$ 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线.

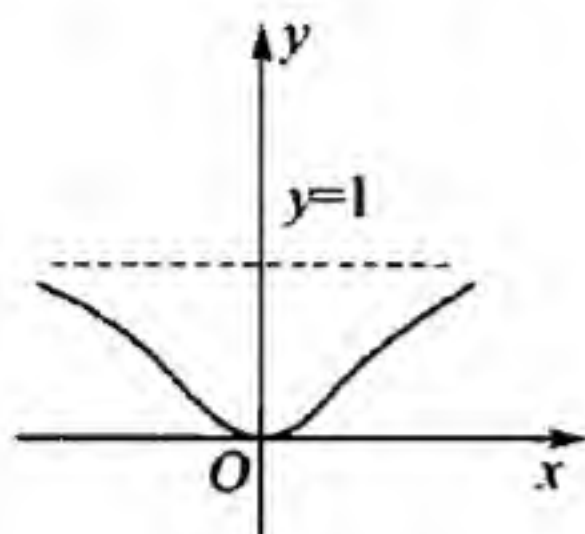
而 $g''(x) = -\frac{2(x^2 - 2)}{x^5}e^{-\frac{1}{x^2}}.$

令 $g''(x) = 0$ 得曲线的拐点为 $x = \pm\sqrt{2}$, 又当 x 经过点 $x = 0$ 时, $g''(x)$ 改变符号, 所以 $x = 0$ 也为拐点.

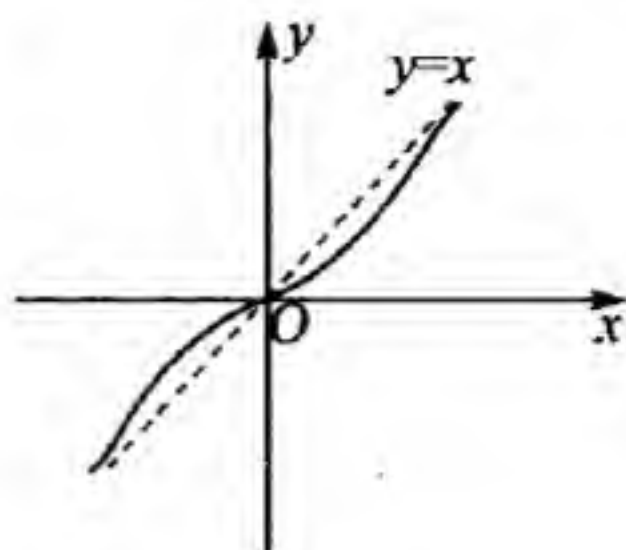
又 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - x) = 0,$

所以 $y = x$ 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线, $g(x)$ 为奇函数. $y = f(x)$

的图象如 1426 题图 1 所示. $y = g(x)$ 的图象如 1426 题图 2 所示



1426 题图 1



1426 题图 2

【1427】 研究下列函数的极值

(1) 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x} \right)$; $f(0) = 0$;

(2) 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\sqrt{2} + \cos \frac{1}{x} \right)$; $f(0) = 0$.

作出这些函数的图形.

解 (1) 由于 $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 < \sqrt{2}$.

及 $e^{-\frac{1}{x^2}} > 0$,

所以 $f(x) > 0 = f(0)$ ($x \neq 0$),

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有极小值 $f(0) = 0$.

当 $x > 0$ 时,

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x} \right),$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} \sqrt{2} \left[1 + \sin \left(\frac{1}{x} - \frac{\pi}{4} \right) \right], \end{aligned}$$

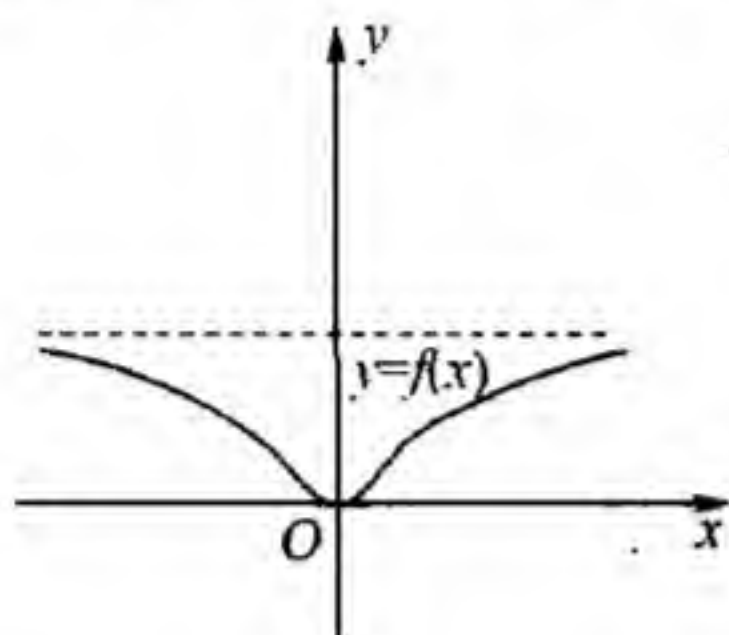
虽然在 $x_k = 2k\pi + \frac{7\pi}{4}$, ($k = 1, 2, \dots$) 有 $f'(x_k) = 0$, 但当 x

经过 x_k 时, $f'(x_k)$ 不改变符号, 所以 $f(x)$ 在 x_k 不取极值. 同理 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内没有极值.

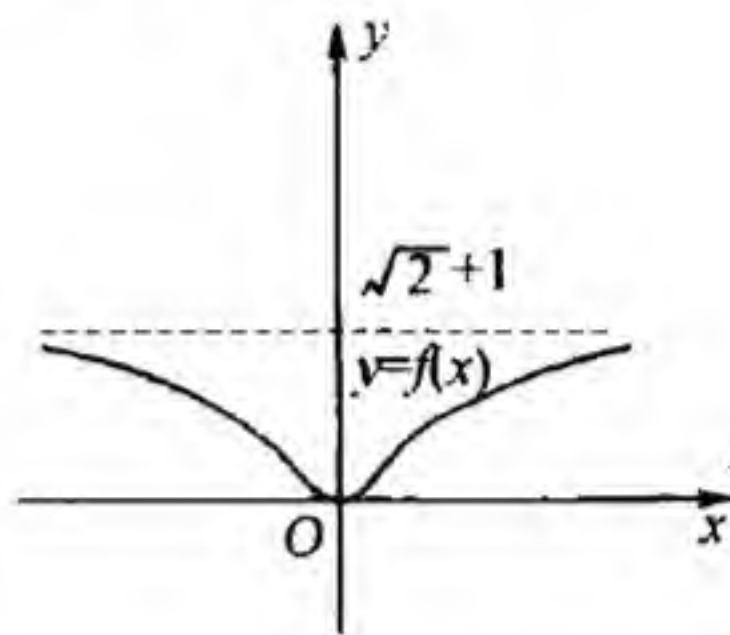
$y = f(x)$ 的图形如 1427 图 1 所示.

(2) 与(1)一样可证, $f(x)$ 在且仅在 $x = 0$ 取极小值 $f(0) = 0$.

$y = f(x)$ 的图形如 1427 题图 2 所示.



1427 题图 1



1427 题图 2

【1428】 若 $x \neq 0, f(x) = |x| \left(2 + \cos \frac{1}{x}\right); f(0) = 0$,

研究此函数在点 $x = 0$ 的极值, 并作出此函数的图形.

解 当 $x \neq 0$ 时, 恒有 $f(x) > f(0)$, 故当 $x = 0$ 时, 有极小值 $f(0) = 0$, 而当 $x > 0$ 时,

$$f(x) = x \left(2 + \cos \frac{1}{x}\right).$$

从而 $f'(x) = 2 + \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$.

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调增加, 故 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内没有极值, 而在 $(0, 1)$ 内 $f(x)$ 有无穷多个极值.

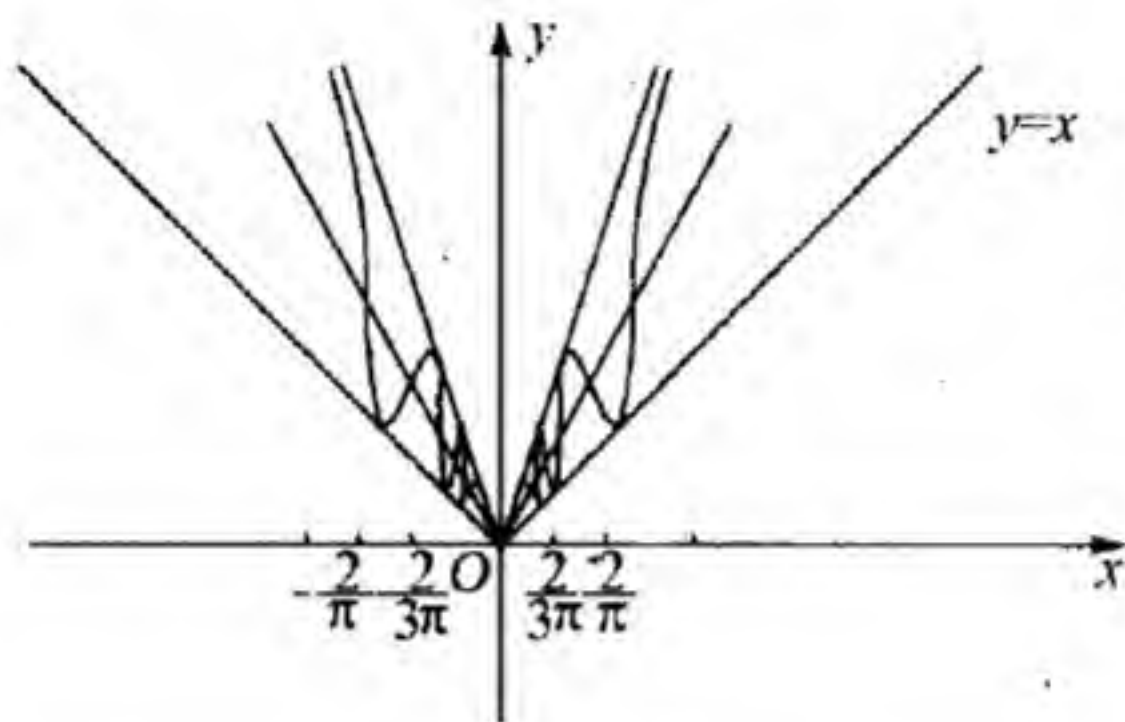
事实上, 设 $x_{2k} = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}, x_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}}$

$$k = 1, 2, \dots,$$

容易验证 $f'(x_{2k}) = 2 + 2k\pi + \frac{\pi}{2} > 0$,

$$f'(x_{2k+1}) = 2 - (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} < 0.$$

由连续函数的介值定理, 存在 $x_k^* \in (x_{2k+1}, x_{2k})$ 使得 $f'(x_k^*) = 0$. 而当 x 经过 x_k^* 时, $f'(x)$ 从负变正, 故 $f(x)$ 在 x_k^* 取极小值, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有无穷多个极小值, 同样可证 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有无穷多个极大值. 函数图形关于 Oy 轴对称. 如 1428 题图所示.



1428 题图

求下列函数的极值(1429 ~ 1444).

【1429】 $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

解 $y' = 3x^2 - 12x + 9$.

令 $y' = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $x = 3$,

因为

$$y'' = 6x - 12, y''|_{x=1} = -6 < 0,$$

$$y''|_{x=3} = 6 > 0,$$

所以, 当 $x = 1$ 时, 有极大值

$$y = 1 - 6 + 9 - 4 = 0.$$

当 $x = 3$ 时, 有极小值

$$y = 3^3 - 6 \times 3^2 + 9 \times 3 - 4 = -4.$$

【1430】 $y = 2x^3 - x^4$.

解 $y' = 4x - 4x^3$.

令 $y' = 0$, 解得 $x = \pm 1$ 或 $x = 0$,

而 $y'' = 4 - 12x^2, y''|_{x=-1} = 4 - 12 = -8 < 0,$

$$y''|_{x=0} = 4 > 0, y''|_{x=1} = 4 - 12 = -8 < 0,$$

所以, 当 $x = -1$ 时有极大值 $y = 1$,

当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 0$,

当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.

【1431】 $y = x(x-1)^2(x-2)^3$.

解 $y' = (x-1)(x-2)^2(6x^2 - 10x + 2)$.

令 $y' = 0$, 解得 $x = 1, x = 2$ 及 $x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$.

当 $x < \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$ 时 $y' < 0$,

当 $\frac{5 - \sqrt{13}}{6} < x < 1$ 时 $y' > 0$,

当 $1 < x < \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$ 时 $y' < 0$,

当 $\frac{5 + \sqrt{13}}{6} < x < 2$ 时 $y' > 0$,

当 $x > 2$ 时 $y' > 0$,

所以当 $x = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$ 时有极小值

$$y = \frac{(5 - \sqrt{13})(1 - \sqrt{13})^2(-7 - \sqrt{13})^3}{6^6}.$$

当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 0$,

当 $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$ 时, 有极小值

$$y = \frac{(5 + \sqrt{13})(1 + \sqrt{13})^2(-7 + \sqrt{13})^3}{6^6}.$$

【1432】 $y = x + \frac{1}{x}$.

解 $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$.

令 $y' = 0$, 解得 $x = \pm 1$,

又 $y'' = \frac{2}{x^3}$, $y''|_{x=-1} = -2$, $y''|_{x=1} = 2$,

所以当 $x = -1$ 时有极大值 $y = -2$,

当 $x = 1$ 时有极小值 $y = 2$.

【1433】 $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

解 $y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

令 $y' = 0$, 解得 $x = \pm 1$.

当 $x < -1$ 时, $y' < 0$,

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$,

当 $x > 1$ 时, $y' < 0$,

所以, 当 $x = -1$ 时有极小值 $y = -1$,

当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.

【1434】 $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.

解 $y' = \frac{5x-7}{(x+1)^3}$.

令 $y' = 0$, 解得 $x = \frac{7}{5}$.

当 $-1 < x < \frac{7}{5}$ 时, $y' < 0$,

当 $x > \frac{7}{5}$ 时, $y' > 0$,

所以, 当 $x = \frac{7}{5}$ 时, 有极小值 $y = -\frac{1}{24}$.

【1435】 $y = \sqrt{2x-x^2}$.

解 $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

令 $y' = 0$, 解得 $x = 1$, 因为

当 $0 < x < 1$ 时, $y' > 0$,

当 $2 > x > 1$ 时, $y' < 0$,

所以当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$, 其次由于 $y \geq 0$, 故当 $x = 0$ 及 $x = 2$ 时有边界的极小值 $y = 0$.

【1436】 $y = x \sqrt[3]{x-1}$.

解 $y' = \frac{4x-3}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}$.

令 $y' = 0$, 得 $x = \frac{3}{4}$,

且导数在 $x = 1$ 处不存在.

当 $x < \frac{3}{4}$ 时 $y' < 0$,

当 $\frac{3}{4} < x < 1$ 时 $y' > 0$,

当 $x > 1$ 时 $y' > 0$.

所以当 $x = \frac{3}{4}$ 时, 有极小值 $y = -\frac{3}{8}\sqrt{2}$ 在点 $x = 1$ 处, 函数不取极值.

【1437】 $y = xe^{-x}$.

解 $y' = e^{-x}(1-x)$.

令 $y' = 0$ 解得 $x = 1$.

当 $x < 1$ 时, $y' > 0$,

当 $x > 1$ 时, $y' < 0$,

所以, 当 $x = 1$ 时有极大值 $y = e^{-1}$.

【1438】 $y = \sqrt{x} \ln x$.

解 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2)$.

令 $y' = 0$, 解得 $x = e^{-2}$.

当 $0 < x < e^{-2}$ 时, $y' < 0$,

当 $x > e^{-2}$ 时, $y' > 0$,

所以当 $x = e^{-2}$ 时, 有极小值 $y = -\frac{2}{e}$.

【1439】 $y = \frac{\ln^2 x}{x}$.

解 $y' = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}$.

令 $y' = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $x = e^2$.

当 $0 < x < 1$ 时, $y' < 0$,

当 $1 < x < e^2$ 时, $y' > 0$,

当 $x > e^2$ 时, $y' < 0$,

所以当 $x = 1$ 时, 有极小值 $y = 0$, 当 $x = e^2$ 时, 有极大值 $y = \frac{4}{e^2}$.

【1440】 $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$.

解 $y' = -\sin x(1 + 2\cos x)$,

令 $y' = 0$, 得 $x = k\pi$ 或 $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} (k = 0, \pm 1, \dots)$,

又 $y'' = -\cos x - 2\cos 2x$,

$$y''|_{x=k\pi} = (-1)^{k+1} - 2 < 0,$$

$$y''|_{x=2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2} + 1 > 0,$$

所以, 当 $x = k\pi$ 时有极大值 $y = (-1)^k + \frac{1}{2}$,

当 $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ 时有极小值 $y = -\frac{3}{4}$.

【1441】 $y = \frac{10}{1 + \sin^2 x}$.

解 当 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $\sin x = 0$, 函数有极大值 $y = 10$.

当 $x = (k + \frac{1}{2})\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时 $|\sin x| = 1$ 函数有极小值 $y = 5$.

【1442】 $y = \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$.

解 $y' = \frac{1-x}{1+x^2}$.

令 $y' = 0$, 解得 $x = 1$.

当 $x < 1$ 时, $y' > 0$,

当 $x > 1$ 时, $y' < 0$,

所以, 当 $x = 1$ 时, 函数有极大值 $y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$.

【1443】 $y = e^x \sin x$.

解 $y' = e^x (\sin x + \cos x)$.

令 $y' = 0$, 解得

$$x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4},$$

或 $x = 2k\pi + \frac{7\pi}{4} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$

又 $y'' = 2e^x \cos x,$

$$y''|_{x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}} < 0, y''|_{x=2k\pi+\frac{7\pi}{4}} > 0,$$

所以, 当 $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$ 时, 有极大值 $y = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{2k\pi+\frac{3\pi}{4}} (k = 0, \pm 1, \dots),$

当 $x = 2k\pi + \frac{7\pi}{4}$ 时, 有极小值 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{2k\pi+\frac{7\pi}{4}} (k = 0, \pm 1, \dots).$

【1444】 $y = |x| e^{-|x-1|}.$

解 当 $x < 0$ 时

$$y = -xe^{x-1}, y' = -(x+1)e^{x-1}.$$

令 $y' = 0$, 解得 $x = -1$. 而

当 $x < -1$ 时, $y' > 0$.

当 $-1 < x < 0$ 时, $y' < 0$,

所以当 $x = -1$ 时有极大值 $y = e^{-2}$.

又当 $0 < x < 1$ 时,

$$y = xe^{x-1}, y' = (x+1)e^{x-1} > 0,$$

所以当 $x = 0$ 时, 有极小值 $y = 0$,

而当 $x > 1$ 时,

$$y = xe^{1-x}, y' = (1-x)e^{1-x} < 0,$$

所以当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.

求下列函数的最小值和最大值(1445 ~ 1449).

【1445】 $f(x) = 2^x$ 在闭区间 $[-1; 5]$.

解 因为 $f(x) = 2^x$ 是单调增加的函数, 所以最小值

$$m = \min_{-1 \leq x \leq 5} f(x) = f(-1) = \frac{1}{2},$$

$$M = \max_{-1 \leq x \leq 5} f(x) = f(5) = 2^5 = 32.$$

【1446】 $f(x) = x^2 - 4x + 6$ 在闭区间 $[-3; 10]$.

解 $f'(x) = 2x - 4.$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 2 \in [-3, 10]$.

而 $f(2) = 2, f(-3) = 9 - 4 \times (-3) + 6 = 27,$

$$f(10) = 66,$$

所以 $m = \min_{-3 \leq x \leq 10} f(x) = 2,$

$$M = \max_{-3 \leq x \leq 10} f(x) = 66.$$

【1447】 $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ 在闭区间 $[-10; 10]$.

解 令 $x^2 - 3x + 2 = 0.$

解得 $x = 1 \in [-10, 10] \quad x = 2 \in [-10, 10].$

因为 $f(x) \geq 0,$

所以 $m = \min_{-1 \leq x \leq 10} f(x) = 0.$

而当 $-10 < x < 1$ 时,

$$f(x) = x^2 - 3x + 2, f'(x) = 2x - 3 < 0,$$

当 $1 < x < 2$ 时,

$$f(x) = -(x^2 - 3x + 2), f'(x) = -(2x - 3),$$

令 $f'(x) = 0,$

解得 $x = \frac{3}{2}.$

当 $2 < x < 10$ 时,

$$f(x) = x^2 - 3x + 2, f'(x) = 2x - 3 > 0,$$

又 $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}, f(-10) = 132, f(10) = 72,$

所以 $M = 132.$

【1448】 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在闭区间 $[0.01; 100]$.

解 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$

令 $f'(x) = 0,$

解得 $x = 1 \in [0.01, 100], x = -1 \notin [0.01, 100].$

又 $f(1) = 2, f(0.01) = 100.01,$

$$f(100) = 100.01,$$

所以 $m = 2 \quad M = 100.01.$

【1449】 $f(x) = \sqrt{5-4x}$ 在闭区间 $[-1; 1]$.

$$\text{解 } f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{5-4x}} < 0,$$

所以, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是单调减少的, 故

$$m = f(1) = 1 \quad M = f(-1) = 3.$$

求下列函数的下确界(inf) 和上确界(sup)(1450 ~ 1453).

【1450】 $f(x) = xe^{-0.01x}$ 在区间 $(0, +\infty)$.

解 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) > 0,$

而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$ 故

$$\inf_{0 < x < +\infty} f(x) = 0,$$

又 $f'(x) = (1 - 0.01x)e^{-0.01x},$

令 $f'(x) = 0,$

得 $x = 100,$

当 $0 < x < 100$ 时, $f'(x) > 0,$

当 $100 < x < +\infty$ 时, $f'(x) < 0,$

故 $\sup_{0 < x < +\infty} f(x) = f(100) = \frac{100}{e}.$

【1451】 $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$, 在区间 $(0, +\infty)$.

解 因为 $f'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x} < 0 \quad (x \in (0, +\infty)),$

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少.

所以 $\sup_{0 < x < +\infty} f(x) = f(0) = 1,$

$$\inf_{0 < x < +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

【1452】 $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ 在区间 $(0, +\infty)$.

解 $f(x) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$,

所以 $\inf_{0 < x < +\infty} f(x) = 0$.

又 $f'(x) = \frac{2x(1-2x^2-x^4)}{(1+x^4)^2}$, 令 $f'(x) = 0$,

解得 $x = -\sqrt{\sqrt{2}-1} \notin (0, +\infty)$, $x = 0$,

及 $x = \sqrt{\sqrt{2}-1} \in [0, +\infty)$,

而 $f(0) = 1$, $f(\sqrt{\sqrt{2}-1}) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$,

所以 $\sup_{0 < x < +\infty} f(x) = f(\sqrt{\sqrt{2}-1}) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$.

【1453】 $f(x) = e^{-x^2} \cos x^2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$.

解 $f'(x) = -2xe^{-x^2}(\cos x^2 + \sin x^2)$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 及

$$x = \pm \sqrt{2k\pi + \frac{3\pi}{4}},$$

$$x = \pm \sqrt{2k\pi + \frac{7\pi}{4}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$f(x)$ 在 $\pm\sqrt{\frac{3\pi}{4}}$ 取最小值, 在 $x = 0$ 取最大值,

所以 $\inf f(x) = f\left(\pm\sqrt{\frac{3\pi}{4}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$,

$$\sup f(x) = f(0) = 1.$$

【1454】 确定函数 $f(\xi) = \frac{1+\xi}{3+\xi^2}$ 在区间 $x < \xi < +\infty$ 内的下确界与上确界, 作出函数 $M(x) = \sup_{x < \xi < +\infty} f(\xi)$ 和 $m(x) = \inf_{x < \xi < +\infty} f(\xi)$ 的图形.

解 因为 $f'(\xi) = \frac{3-2\xi-\xi^2}{(3+\xi^2)^2}$,

令 $f'(\xi) = 0$, 得 $\xi = -3, \xi = 1$,

当 $-\infty < \xi < -3$ 时, $f'(\xi) < 0$,

当 $-3 < \xi < 1$ 时, $f'(\xi) > 0$,

当 $1 < \xi < +\infty$ 时, $f'(\xi) < 0$.

所以 $f(-3)$ 为 $f(\xi)$ 的极小值, $f(1)$ 为 $f(\xi)$ 的极大值, 又

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} f(\xi) = 0.$$

于是, 当 $-\infty < x < -3$ 时, $m(x) = f(-3) = -\frac{1}{6}$.

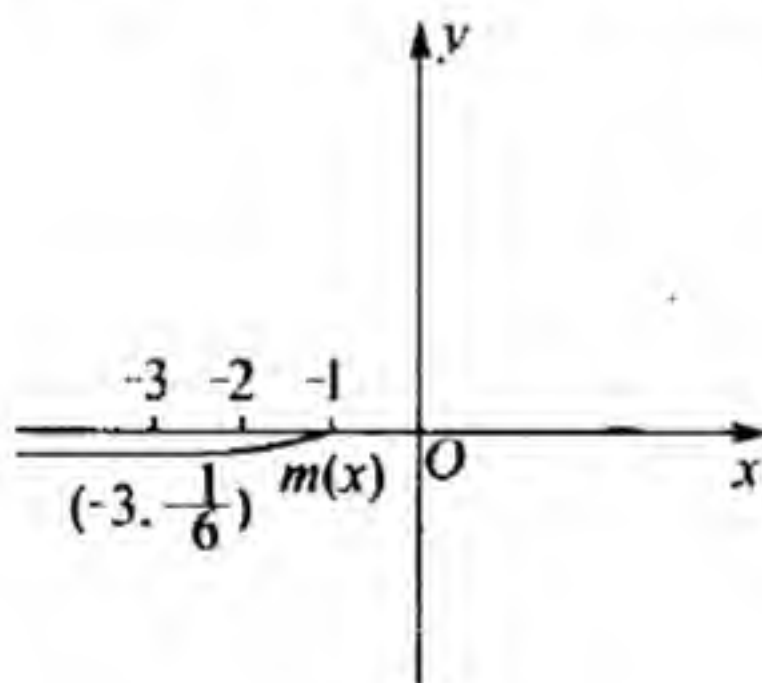
当 $-3 < x \leq -1$ 时, $m(x) = \frac{1+x}{3+x^2}$.

当 $-1 < x < +\infty$ 时, $m(x) = 0$.

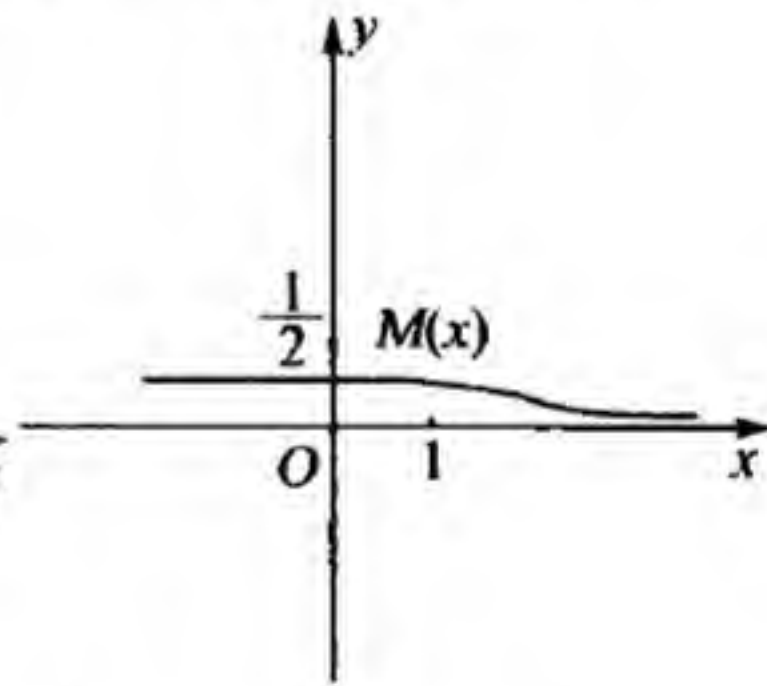
当 $-\infty < x \leq 1$ 时, $M(x) = f(1) = \frac{1}{2}$.

当 $1 < x < +\infty$ 时, $M(x) = \frac{1+x}{3+x^2}$.

$m(x)$ 及 $M(x)$ 的图形分别为 1454 题图 1 及图 2



1454 题图 1



1454 题图 2

【1454. 1】 设

$$M_k = \sup_x |f^{(k)}(x)|, k = 0, 1, 2, \dots$$

若 $f(x) = e^{-x^2}$, 求 M_0, M_1 和 M_2 .

解 $f(x) = e^{-x^2} \leq 1 = f(0)$, 所以 $M_0 = 1$, 而

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2},$$

$$f'''(x) = 4x(3 - 2x^2)e^{-x^2},$$

当 $-\infty < x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$ 时, $f''(x) > 0$, $f'(x)$ 增加.

当 $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$ 时, $f''(x) < 0$, $f'(x)$ 减少.

当 $\sqrt{\frac{1}{2}} < x < +\infty$ 时, $f''(x) > 0$, $f'(x)$ 增加.

且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2xe^{-x^2}) = 0$.

$$f'\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{e}},$$

所以 $M_1 = f'\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{e}}$,

同样, 通过讨论 $f''(x)$ 可得

$$M_2 = f''\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 4e^{-\frac{3}{2}}.$$

【1455】 求下列各序列的最大项:

$$(1) \frac{n^{10}}{2^n} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$(2) \frac{\sqrt{n}}{n + 10000} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$(3) \sqrt[n]{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

解 (1) 设 $f(x) = \frac{x^{10}}{2^x}$.

则 $f'(x) = \frac{x^9(10 - x \ln 2)}{2^x}$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{10}{\ln 2}$.

当 $0 < x < \frac{10}{\ln 2}$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $\frac{10}{\ln 2} < x < +\infty$ 时, $f'(x) < 0$,

从而 $f(x)$ 在 $x = \frac{10}{\ln 2}$ 处取到在 $(0, +\infty)$ 内的最大值. 而 $\left[\frac{10}{\ln 2}\right] =$

14. 所以最大项

$$\max_n \left\{ \frac{n^{10}}{2^n} \right\} = \max \left\{ \frac{13^{10}}{2^{13}}, \frac{14^{10}}{2^{14}}, \frac{15^{10}}{2^{15}} \right\} = \frac{14^{10}}{2^{14}}.$$

$$(2) \text{ 设 } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+10000}$$

$$\text{则 } f'(x) = \frac{10000-x}{2\sqrt{x}(x+10000)^2}.$$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 10000$. 而当 $0 < x < 10000$ 时, $f'(x) > 0$.

当 $10000 < x < +\infty$ 时, $f'(x) < 0$. 所以, $f(x)$ 在 $x = 10000$ 处取到在 $(0, +\infty)$ 内的最大值. 故最大项为

$$\max_n \left\{ \frac{\sqrt{n}}{n+10000} \right\} = f(10000) = \frac{\sqrt{10000}}{20000} = \frac{1}{200}.$$

$$(3) \text{ 设 } f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad (x > 0),$$

$$\text{则 } f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x).$$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = e$.

当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $e < x < +\infty$ 时 $f'(x) < 0$. 所以 $f(x)$ 在 $x = e$ 处取到在 $(0, +\infty)$ 内的最大值. 故最大项为

$$\max_n \{ \sqrt[n]{n} \} = \max \{ \sqrt[3]{3}, \sqrt{2} \} = \sqrt[3]{3}.$$

【1456】 证明下列不等式:

$$(1) |3x - x^3| \leq 2 \quad \text{当 } |x| \leq 2;$$

$$(2) \frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1 \quad \text{若 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 且 } p > 1;$$

$$(3) x^m(a-x)^n \leq \frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}$$

若 $m > 0, n > 0$ 且 $0 \leq x \leq a$;

$$(4) \frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n} \leq x+a \quad (x > 0, a > 0, n > 1);$$

$$(5) |a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

证 (1) 设 $f(x) = 3x - x^3$.

$$\text{则 } f'(x) = 3(1 - x^2),$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \pm 1 \in [-2, 2]$,

$$\begin{aligned}
 \text{故} \quad \min_{-2 \leq x \leq 2} f(x) &= \min\{f(-2), f(-1), f(1), f(2)\} \\
 &= f(-1) = -2, \\
 \max_{-2 \leq x \leq 2} f(x) &= \max\{f(-2), f(-1), f(1), f(2)\} \\
 &= f(1) = 2,
 \end{aligned}$$

即当 $-2 \leq x \leq 2$ 时, $-2 \leq f(x) \leq 2$. 因此

$$|3x - x^3| \leq 2.$$

(2) 设 $f(x) = x^p + (1-x)^p$.

$$\text{则} \quad f'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1},$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x = \frac{1}{2} \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned}
 \text{故} \quad \min_{0 \leq x \leq 1} f(x) &= \min\left\{f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)\right\} \\
 &= f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}},
 \end{aligned}$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} f(x) = \max\left\{f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)\right\} = 1.$$

因此, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1.$$

(3) 设 $f(x) = x^m(a-x)^n$.

$$\text{则} \quad f'(x) = x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma - (m+n)x],$$

令 $f'(x) = 0$ 得

$$x = \frac{ma}{m+n} \in [0, a],$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以} \quad \max_{0 \leq x \leq a} f(x) &= \max\left\{f(0), f\left(\frac{ma}{m+n}\right), f(a)\right\} \\
 &= f\left(\frac{ma}{m+n}\right) = \left(\frac{ma}{m+n}\right)^m \left(a - \frac{ma}{m+n}\right)^n \\
 &= \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}.
 \end{aligned}$$

因此, 当 $0 \leq x \leq a$ 时,

$$x^m(a-x)^n \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}.$$

(4) 设 $f(x) = \frac{(x^n + a^n)^{\frac{1}{n}}}{x + a}$.

则 $f'(x) = \frac{a(x^n + a^n)^{\frac{1}{n}}(x^{n-1} - a^{n-1})}{(x + a)^2(x^n + a^n)}$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = a$,

当 $0 < x < a$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $a < x < +\infty$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(a) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}}$ 为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的最小值, 又

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1,$$

所以 $\sup_{0 < x < +\infty} f(x) = 1$,

即当 $0 < x < +\infty$ 时,

$$\frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \frac{(x^n + a^n)^{\frac{1}{n}}}{x + a} \leq 1.$$

由于 $x + a > 0$, 因此

$$\frac{x + a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n} \leq x + a.$$

(5) $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$,

其中 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$

所以 $|a \sin x + b \cos x| = \sqrt{a^2 + b^2} |\sin(x + \varphi)|$
 $\leq \sqrt{a^2 + b^2}.$

【1456. 1】 证明不等式:

$$\frac{2}{3} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leq 2 \quad \text{当 } -\infty < x < +\infty.$$

证 设 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}.$

则 $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2},$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \pm 1.$

当 $-\infty < x < -1$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $-1 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $1 < x < +\infty$ 时 $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处有极大值 $f(-1) = 2$; 在 $x = 1$ 处有极小值 $f(1) = \frac{2}{3}$, 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1,$$

所以 $\sup_{-\infty < x < +\infty} f(x) = 2, \inf_{-\infty < x < +\infty} f(x) = \frac{2}{3}$,

所以 $\frac{2}{3} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leq 2$.

【1457】 求多项式

$$P(x) = x(x-1)^2(x+2),$$

在闭区间 $[-2, 1]$ 上“与零的差”, 亦即求出

$$E_P = \sup_{-2 \leq x \leq 1} |P(x)|.$$

解 $P'(x) = 2(x-1)(2x^2 + 2x - 1)$.

令 $P'(x) = 0$, 解得

$$x = 1 \in [-2, 1] \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \in [-2, 1],$$

所以 $E_P = \max \left\{ |P(-2)|, |P(1)|, \left| P\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \right|, \left| P\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \right| \right\}$
 $= \left| P\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \right| = \frac{9+6\sqrt{3}}{4}.$

【1458】 应怎样选择系数 q , 使多项式

$$P(x) = x^2 + q,$$

在闭区间 $[-1, 1]$ 上与零的差最小, 亦即

$$E_P = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| = \min.$$

解 $P'(x) = 2x$.

令 $P'(x) = 0$, 得 $x = 0$,

$$\begin{aligned}\text{所以 } E_p &= \max\{|P(-1)|, |P(0)|, |P(1)|\} \\ &= \max\{|1+q|, |q|\}.\end{aligned}$$

当 $|q| = |1+q|$ 时, E_p 最小, 解之得 $q = -\frac{1}{2}$.

【1459】 数

$$\Delta = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|,$$

称作函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的绝对差. 求函数 $f(x) = x^2$ 与 $g(x) = x^3$ 在闭区间 $[0, 1]$ 的绝对差.

【1459】 解 设 $F(x) = f(x) - g(x) = x^2 - x^3$.

$$\text{则 } F'(x) = 2x - 3x^2.$$

令 $F'(x) = 0$, 解之得

$$x = 0 \in [0, 1] \quad \text{及} \quad x = \frac{2}{3} \in [0, 1].$$

$$\begin{aligned}\text{所以 } \Delta &= \sup_{0 \leq x \leq 1} |F(x)| \\ &= \max\left\{|F(0)|, \left|F\left(\frac{2}{3}\right)\right|, |F(1)|\right\} \\ &= \left|\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right| = \frac{4}{27}.\end{aligned}$$

【1460】 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上用线性函数 $g(x) = (x_1 + x_2)x + b$ 近似地替代函数 $f(x) = x^2$, 使得函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的绝对差(参阅前题)最小, 并求出这个最小的绝对差.

解 设

$$F(x) = f(x) - g(x) = x^2 - [(x_1 + x_2)x + b].$$

$$\text{则 } F'(x) = 2x - (x_1 + x_2).$$

令 $F'(x) = 0$ 得 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, 于是

$$\begin{aligned}\Delta &= \max\left\{|F(x_1)|, |F(x_2)|, \left|F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right|\right\} \\ &= \max\left\{|x_1 x_2 + b|, \left|\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} + b\right|\right\}.\end{aligned}$$

要 Δ 最小, 需

$$|x_1 + x_2 + b| = \left| \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} + b \right|,$$

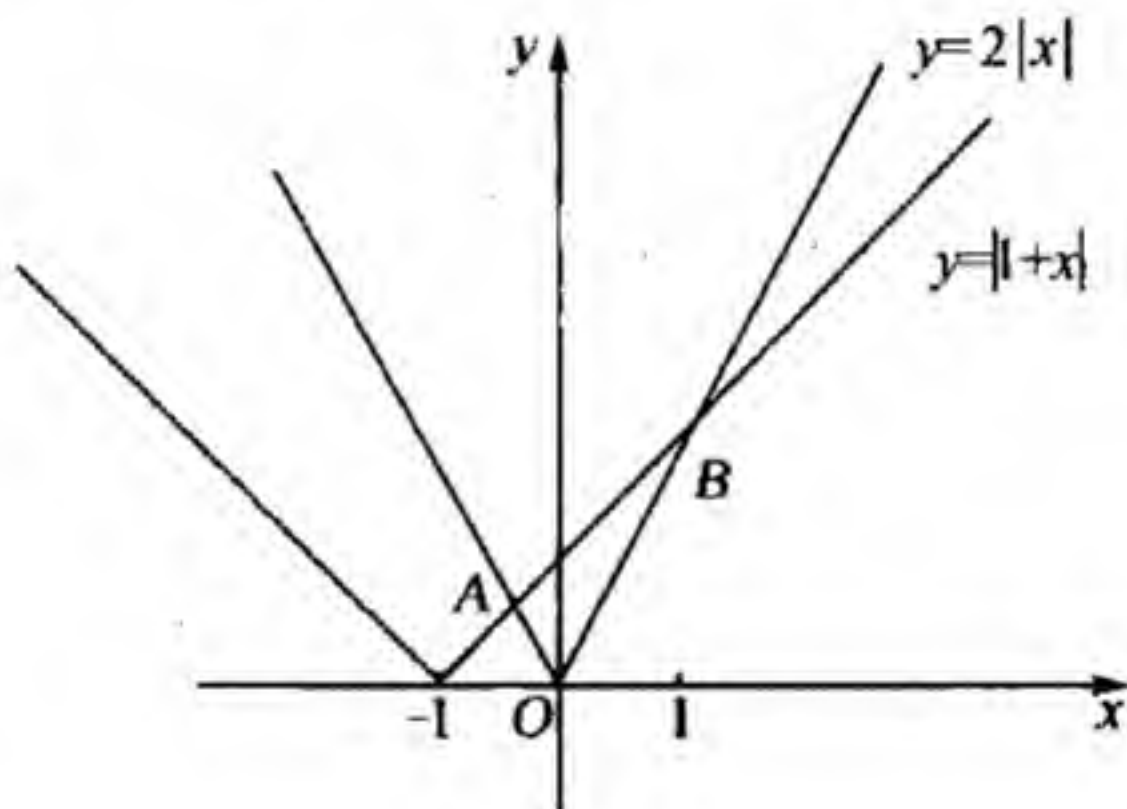
解之得 $b = -\frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2)$.

此时 $g(x) = (x_1 + x_2)x - \frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2)$,

而最小的绝对差为 $\Delta = \frac{1}{8}(x_1 - x_2)^2$.

【1461】 求函数 $f(x) = \max\{2|x|, |1+x|\}$ 的最小值.

解 $y = 2|x|$ 及 $y = |1+x|$ 的图形如 1461 题图所示, 它们的交点为 $A(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $B(1, 2)$.



1461 题图

所以

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 1 \leq x < +\infty, \\ 1+x, & -\frac{1}{3} \leq x < 1, \\ -2x, & -\infty < x \leq -\frac{1}{3}, \end{cases}$$

因此, $f(x)$ 的极小值为 $f(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$.

确定下列各方程的实根数目, 并确定这些根所在的范围, 设 (1462 ~ 1469).

【1462】 $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0.$

解 设 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10.$

则 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数. 且有

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9,$$

令 $f'(x) = 0$ 解之得 $x = 1$, 及 $x = 3.$

当 $-\infty < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 且

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, f(1) = -6 < 0.$$

故在 $(-\infty, 1)$ 内, 方程无实根.

当 $1 < x < 3$ 时, $f'(x) < 0$, 所以在 $(1, 3)$ 内方程也无实根.

当 $3 < x < +\infty$ 时, $f'(x) > 0$. 且

$$f(3) = -10 < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

故在 $(3, +\infty)$ 内方程有且仅有一实根.

总之, 方程 $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$ 有且仅有一实根, 这一实根在 $(3, +\infty)$ 内.

【1463】 $x^3 - 3x^2 - 9x + h = 0.$

解 设 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + h.$

则 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9,$

令 $f'(x) = 0$ 得驻点 $x = -1$, 及 $x = 3.$

由于 $f(-1) = 5 + h, f(3) = -27 + h,$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

故当 $h < -5$ 时,

$$f(-1) < 0, f(3) < 0,$$

且, 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $x \in (-1, 3)$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $x \in (3, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 因此, 方程有且仅有一实根位于 $(3, +\infty)$ 内.

当 $-5 < h < 27$ 时, $f(-1) > 0, f(3) < 0, f'(x)$ 的符号变化同上.

于是, 方程有三个实根分别位于 $(-\infty, -1), (-1, 3)$ 及 $(3, +\infty)$ 内;

当 $h > 27$ 时 $f(3) > 0, f(-1) > 0$.

因此, 方程有且仅有一实根, 这一实根位于 $(-\infty, -1)$ 内;

当 $h = -5$ 时, 方程有一个二重实根 $x = -1$ 及另外一个实根位于 $(3, +\infty)$ 内;

当 $h = 27$ 时, 方程有一个二重实根 $x = 3$ 及另外一实根位于 $(-\infty, -1)$ 内.

【1464】 $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0.$

解 设 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20.$

则 $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12$
 $= 12(x-1)^2(x+1).$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = \pm 1$,

由于 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$
 $f(-1) = -31 < 0, f(1) = -15 < 0,$

并且, 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

因此, 方程有两实根. 分别位于 $(-\infty, -1)$ 及 $(-1, +\infty)$ 内.

【1465】 $x^5 - 5x = a.$

解 设 $f(x) = x^5 - 5x - a.$

则 $f'(x) = 5(x^4 - 1) = 5(x^2 + 1)(x^2 - 1).$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = \pm 1$.

由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$f(-1) = 4 - a, f(1) = -4 - a.$$

当 $-\infty < x < -1$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $-1 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $1 < x < +\infty$ 时, $f'(x) > 0$,

故当 $a < -4$ 时 $f(-1) > 0, f(1) > 0$,

因此, 方程有且仅有一实根, 这一实根位于 $(-\infty, -1)$ 内.

当 $-4 < a < 4$ 时,

$$f(-1) > 0, f(1) < 0.$$

此时,方程有三个实根,它们分别位于 $(-\infty, -1)$ 、 $(-1, 1)$ 及 $(1, +\infty)$ 内;

当 $a > 4$ 时,

$$f(-1) < 0, f(1) < 0$$

因此,方程有且仅有一实根,这一实根位于 $(1, +\infty)$ 内.

【1466】 $\ln x = kx$.

解 当 $k = 0$ 时,方程显然仅有一实根 $x = 1$,因此,不妨设 $k > 0$,令

$$f(x) = \ln x - kx \quad (x > 0).$$

则
$$f'(x) = \frac{1}{x} - k,$$

令 $f'(x) = 0$ 得驻点为

$$x = \frac{1}{k} \quad (k > 0).$$

由于
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

故曲线始终呈凹状.

当 $x \in (0, \frac{1}{k})$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $x \in (\frac{1}{k}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$,

又
$$f\left(\frac{1}{k}\right) = \ln \frac{1}{k} - 1,$$

故当 $k > \frac{1}{e}$ 时, $f\left(\frac{1}{k}\right) < 0$ 此时方程无根.

当 $0 < k < \frac{1}{e}$ 时, $f\left(\frac{1}{k}\right) > 0$,

而
$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

因此,方程有两个实根,分别位于 $(0, \frac{1}{k})$ 和 $(\frac{1}{k}, +\infty)$ 内;

当 $-\infty < k < 0$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty, f(1) = -k > 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - k > 0,$$

因此, 方程有且仅有一实根位于 $(0, 1)$ 内.

【1467】 $e^x = ax^2$.

解 当 $a \leq 0$ 时, 方程显然无解. 故不妨设 $a > 0$ 对于函数 $f(x) = e^x - ax^2$ 有 $f(0) = 1 > 0$ 及 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 所以在 $(-\infty, 0)$ 内方程 $f(x) = 0$ 至少有一实根.

又当 $-\infty < x < 0$ 时,

$$f'(x) = e^x - 2ax > 0,$$

所以, $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, 0)$ 内只有唯一的实根.

当 $x > 0$ 时, 方程 $e^x = ax^2$ 可转化为方程

$$x = \ln a + 2 \ln x \quad (x > 0, a > 0).$$

设 $g(x) = x - \ln a - 2 \ln x$,

则 $g'(x) = 1 - \frac{2}{x}$,

令 $g'(x) = 0$ 得 $x = 2$,

当 $0 < x < 2$ 时, $g'(x) < 0$,

当 $2 < x < +\infty$ 时, $g'(x) > 0$,

所以 $g(2) = \ln \frac{e^2}{4a}$ 为极小值, 又

$$\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty,$$

因此, 当 $g(2) > 0$, 即 $0 < a < \frac{e^2}{4}$ 时, $g(x) = 0$ 无根.

当 $g(2) = 0$ 时, 即 $a = \frac{e^2}{4}$ 时, $g(x) = 0$ 有唯一的根.

当 $g(2) < 0$ 时, $g(x) = 0$ 有两个根, 它们分别位于 $(0, 2)$ 及 $(2, +\infty)$ 内.

综上所述, 方程 $e^x = ax^2$ 的实根情况如下:

当 $a \leq 0$ 时, 无实根.

当 $0 < a < \frac{e^2}{4}$ 时, 有唯一实根. 它位于 $(-\infty, 0)$ 内.

当 $a = \frac{e^2}{4}$ 时, 有两个实根, 一个根为 2, 另一根位于 $(-\infty, 0)$ 内.

当 $\frac{e^2}{4} < a < +\infty$ 时, 有三个实根, 分别位于 $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ 及 $(2, +\infty)$ 内.

【1468】 $\sin^3 x \cdot \cos x = a, 0 \leq x \leq \pi$.

解 当 $a = 0$ 时, 方程显然有三个实根. $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

因此, 不妨设 $a \neq 0$. 令 $f(x) = \sin^3 x \cos^2 x - a$.

则 $f'(x) = 3\sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x$,

令 $f'(x) = 0$ 得 $(0, \pi)$ 内的驻点为 $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$.

由于 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16} - a$,

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{16} - a,$$

$$f(0) = f(\pi) = -a.$$

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 时, $f'(x) < 0$,

所以, 当 $0 < |a| < \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时, 方程有两个实根位于 $(0, \pi)$ 内.

当 $|a| > \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时, 方程无实根.

【1469】 $\operatorname{ch} x = kx$.

解 设 $f(x) = \operatorname{ch} x - kx$.

则 $f'(x) = \operatorname{sh} x - k$,

令 $f'(x) = 0$, 得唯一驻点 x_0 . 它满足 $k = \operatorname{sh} x_0$.

而 $f''(x) = \operatorname{ch} x > 0$, 故曲线图形呈凹状, 且在 $x = x_0$ 取到最小值, 显然有

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 因此, 我们只需考虑 $f(x_0)$ 的符号. 而

$$f(x_0) = \operatorname{ch} x_0 - kx_0 = \operatorname{ch} x_0 - x_0 \operatorname{sh} x_0.$$

先设 $k > 0$, 则 $x_0 > 0$, 则引进辅助函数

$$g(x) = \operatorname{ch} x - x \operatorname{sh} x.$$

方程 $g(x) = 0$, 即 $\operatorname{cth} x = x$ 的有唯一正根 $\eta \approx 1.2$.

事实上, 由于

$$g'(x) = -x \operatorname{ch} x < 0 \quad (x > 0).$$

故 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调下降, 且

$$g(0) = 1 > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty,$$

故 $g(x) = 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上有唯一正根 η .

若 $k > \operatorname{sh} \eta$, 即 $\operatorname{sh} x_0 > \operatorname{sh} \eta$. 由于 $\operatorname{sh} x$ 是严格增加的, 故必有 $x_0 > \eta$, 从而, 由 $g(x)$ 的单调递减性有

$$f(x_0) = \operatorname{ch} x_0 - x_0 \operatorname{sh} x_0 < \operatorname{ch} \eta - \eta \operatorname{sh} \eta = 0,$$

因此, 方程有两个实根. 又由于

$$f(0) = 1 > 0,$$

$$f(\eta) = \operatorname{ch} \eta - k\eta < \operatorname{ch} \eta - \eta \operatorname{sh} \eta = 0.$$

故两根分别位于 $(0, \eta)$, $(\eta, +\infty)$ 内.

若 $k = \operatorname{sh} \eta$, 则 $\operatorname{sh} x_0 = \operatorname{sh} \eta$. 从而 $x_0 = \eta$,

因此 $f(x_0) = 0$, 此时方程 $f(x) = 0$ 恰有一实根 x_0 .

若 $0 < k < \operatorname{sh} \eta$, 则 $\operatorname{sh} x_0 < \operatorname{sh} \eta$. 从而 $x_0 < \eta$. 因此

$$f(x_0) = \operatorname{ch} x_0 - x_0 \operatorname{sh} x_0 > \operatorname{ch} \eta - \eta \operatorname{sh} \eta = 0,$$

故方程无实根.

若 $k = 0$, 显然方程 $f(x) = 0$ 无实根.

若 $k < 0$, 则可令 $x = -t$, 于是原方程变为

$$\operatorname{ch} t = -kt \quad (-k > 0).$$

根据上面的讨论, 可知当 $-k > \operatorname{sh} \eta$ 时, 原方程有两根, 分位于 $(-\eta, 0)$ 及 $(-\infty, -\eta)$ 内.

当 $-k = \operatorname{sh} \eta$ 时, 原方程有唯一的实根 $-\eta$.

当 $0 < -k < \operatorname{sh} \eta$ 时, 原方程无实根.

综上所述,我们有

若 $|k| > \operatorname{sh} \eta$, 方程有两实根.

若 $|k| = \operatorname{sh} \eta$, 方程只有一实根.

若 $|k| < \operatorname{sh} \eta$, 方程无实根.

【1470】 问在什么条件下方程

$$x^3 + px + q = 0,$$

有:(1) 一个实根;(2) 三个实根;

在平面 (p, q) 上描绘出相应的域.

解 设 $f(x) = x^3 + px + q$.

则 $f'(x) = 3x^2 + p$.

若 $p \geq 0$, 则 $f'(x) > 0$ ($x \neq 0$), 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内严格增加, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 故 $f(x) = 0$ 有唯一实根.

若 $p < 0$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$, $x_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}$,

$f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 和 $[x_2, +\infty)$ 上严格增加. 而在 $[x_1, x_2]$ 上 $f(x)$ 严格减小

因此, 若 $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 仅有一个实根.

若 $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 有三个实根.

由于 $f(x_1) = \frac{p}{3} \sqrt{-\frac{p}{3}} - p \sqrt{-\frac{p}{3}} + q$,

$$f(x_2) = -\frac{p}{3} \sqrt{-\frac{p}{3}} + p \sqrt{-\frac{p}{3}} + q.$$

故 $f(x_1)f(x_2) > 0$ 等价于 $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$.

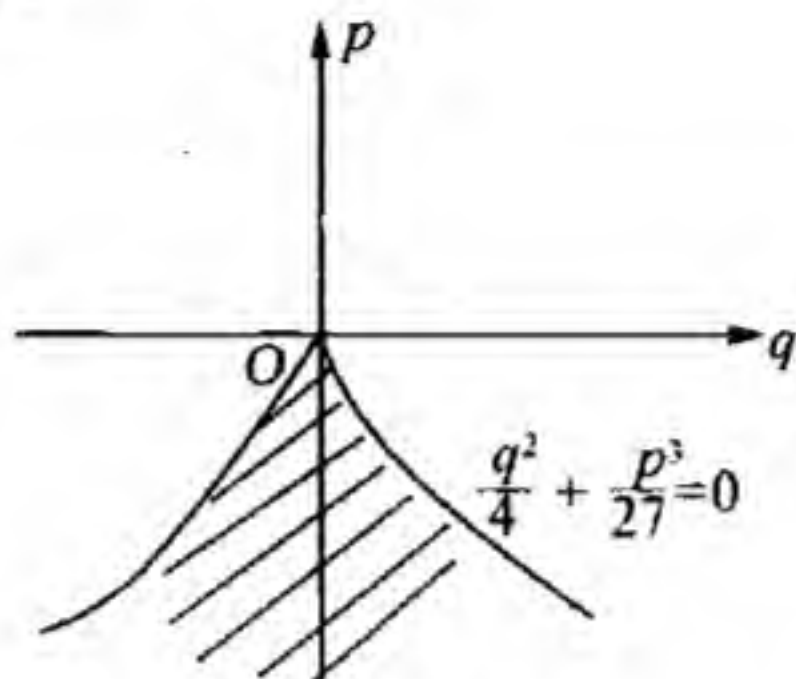
此即方程仅有一实根的条件 ($p \geq 0$ 的情形可合并到此条件中),

若 $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, 则方程有三个实根.

若 $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, 则方程有一个二重实根及一个单实根. 此时,

也可认为方程有三个实根.

如 1470 图所示.



1470 题图

曲线 $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$ 的下方(含曲线)是方程有三个实根的 (p, q) 域, 以阴影部分表示. 而曲线的上方则是方程仅有一实根的 (p, q) 域, 图中非阴影部分.

§ 12. 依据函数的特征点作函数图形

为了作出函数 $y = f(x)$ 的图形, 必须:

- (1) 确定这个函数的存在域并研究函数在边界点上的性质;
 - (2) 查明图形的对称性与周期性;
 - (3) 求出函数的不连续点与连续区间;
 - (4) 确定函数零点与同号区间;
 - (5) 求出极值点并查明函数递增和递减的区间;
 - (6) 确定拐点及函数图形凸凹的区间;
 - (7) 如果有渐近线存在, 则求出渐近线;
 - (8) 指出函数图形的各种特性, 个别情况下可简化总图.
- 标有(*)号的习题中, 要近似地求出拐点.

作出下列各函数的图形(1471 ~ 1530).

【1471】 $y = 3x - x^3$.

解 $y' = 3 - 3x^2$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$, $y'' = -6x$, 令 $y'' =$

0 得 $x = 0$.

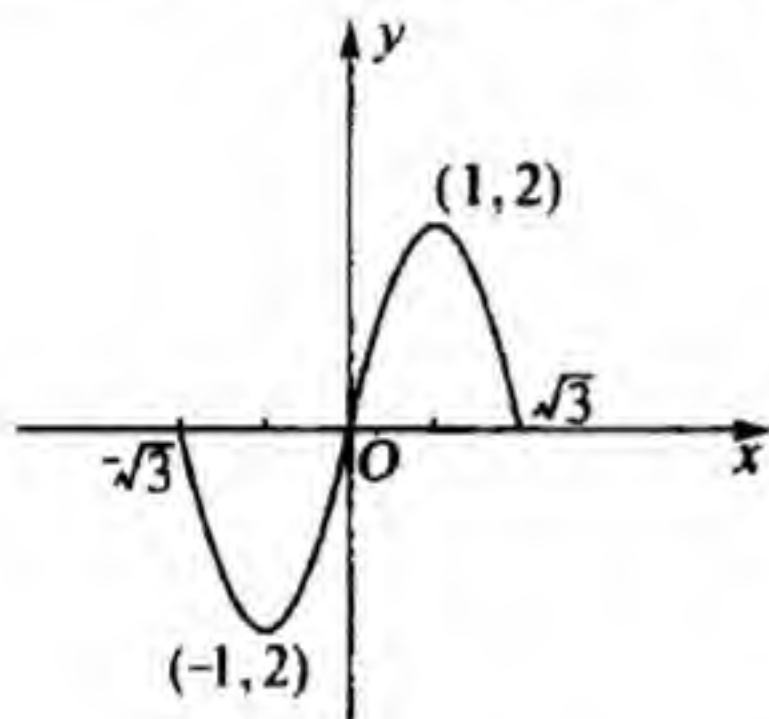
列表

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\searrow \cup$	极小值	$\nearrow \cup$	拐点	$\nearrow \cap$	极大值	$\searrow \cap$

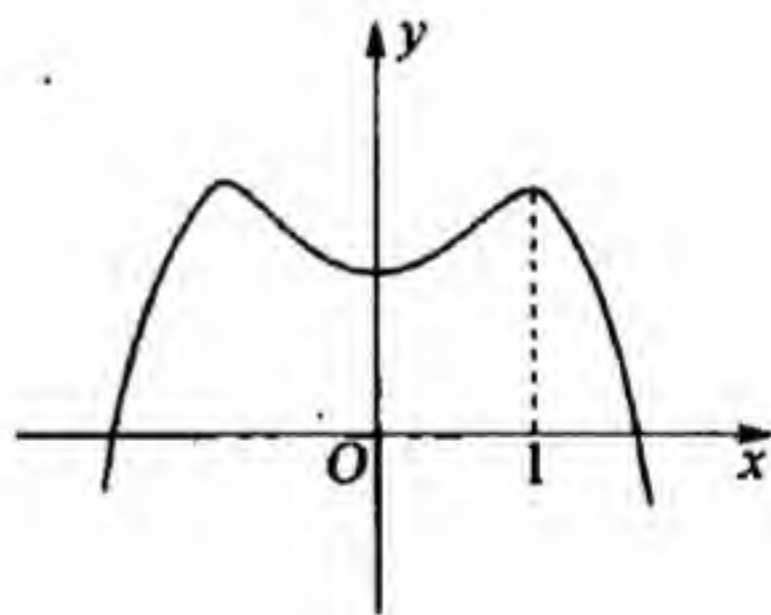
$$y|_{x=-1} = -2; y|_{x=1} = 2.$$

当 $x = 0, \pm\sqrt{3}$ 时, $y = 0$.

图形关于原点对称, 如 1471 题图所示.



1471 题图



1472 题图

注: “ \nearrow ”表示单调增加, “ \searrow ”表示单调减小, “ \cup ”表示凹, “ \cap ”表示凸.

【1472】 $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$

解 $y' = 2x - 2x^3$.

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 及 $x = \pm 1$,

$$y'' = 2 - 6x^2.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ 图形关于 Oy 轴对称.

当 $x = \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}} \approx \pm 1.65$ 时, $y = 0$.

列表

x	$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$	0	$(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	-	0	+	+	+	0	-
y''	+	+	+	0	-	-	-
y	$\searrow \cup$	极小值	$\nearrow \cup$	拐点	$\nearrow \cup$	极大值	$\searrow \cup$

当 $x = 0$ 时, $y = 1$;当 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时, $y = \frac{23}{18}$;当 $x = \pm 1$ 时, $y = \frac{3}{2}$.

如 1472 题图所示

【1473】 $y = (x+1)(x-2)^2$.解 $y' = 3x(x-2)$.令 $y' = 0$ 得 $x = 0$, 及 $x = 2$,

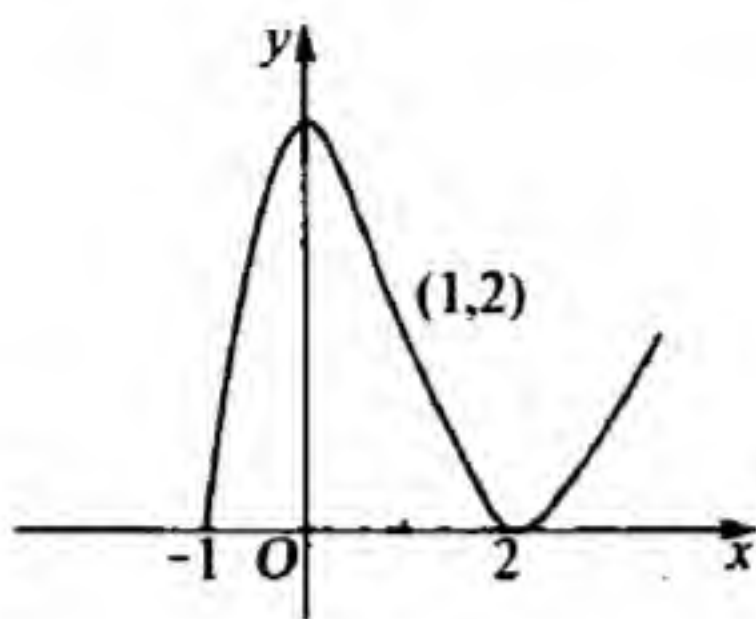
$$y'' = 6x - 6.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 1$.

列表

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+
y	$\nearrow \cup$	极大值	$\searrow \cup$	拐点	$\searrow \cup$	极小值	$\nearrow \cup$

当 $x = 0$ 时, $y = 4$; 当 $x = 1$ 时, $y = 2$;当 $x = -1$, 或 2 时, $y = 0$. 如 1473 题图所示.【1474*】 $y = \frac{2-x^2}{1+x^4}$.解 图形关于 Oy 轴对称



1473 题图

$$y' = \frac{2x(x^4 - 4x^2 - 1)}{(1 + x^4)^2}.$$

令 $y' = 0$, 得 $x = 0$ 及 $x = \pm\sqrt{2+\sqrt{5}} \approx \pm 2.05$,

$$y'' = -\frac{2(3x^8 - 20x^6 - 12x^4 + 12x^2 + 1)}{(1 + x^4)^3}.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm 2.67$ 及 ± 0.77 . 经判别知它们为拐点. 又

$$y''|_{x=0} = -2 < 0.$$

故此时有极大值 $y = 2$,

$$y''|_{x=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}} > 0.$$

故有极小值 $y = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

又 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$, 故 $y = 0$ 为渐近线.

当 $x = \pm\sqrt{2}$ 时, $y = 0$.

如 1474 题图所示

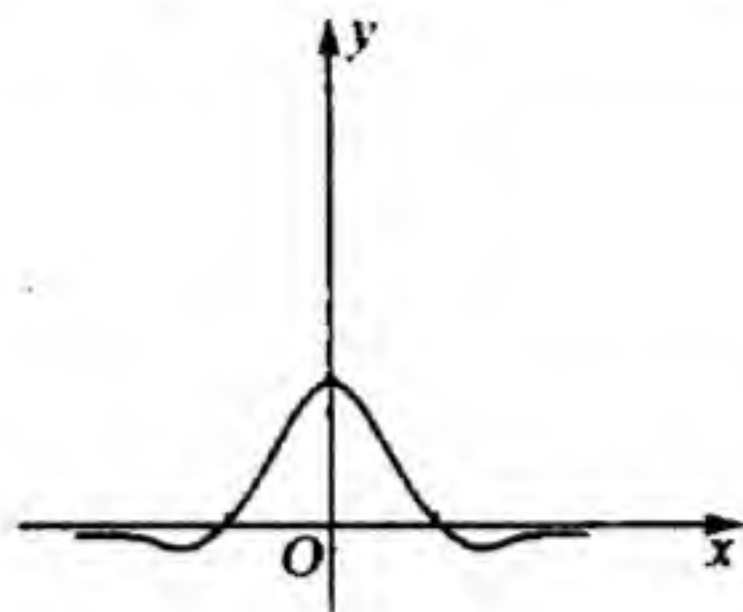
【1475·】 $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}.$

解 当 $x = \pm 1$ 时, $y = 0$, 渐近线 $x = 2, x = 3, y = 1$,

$$y' = \frac{-5x^2 + 14x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^2},$$

$$y'' = \frac{2(5x^3 - 21x^2 + 15x + 17)}{(x^2 - 5x + 6)^3},$$

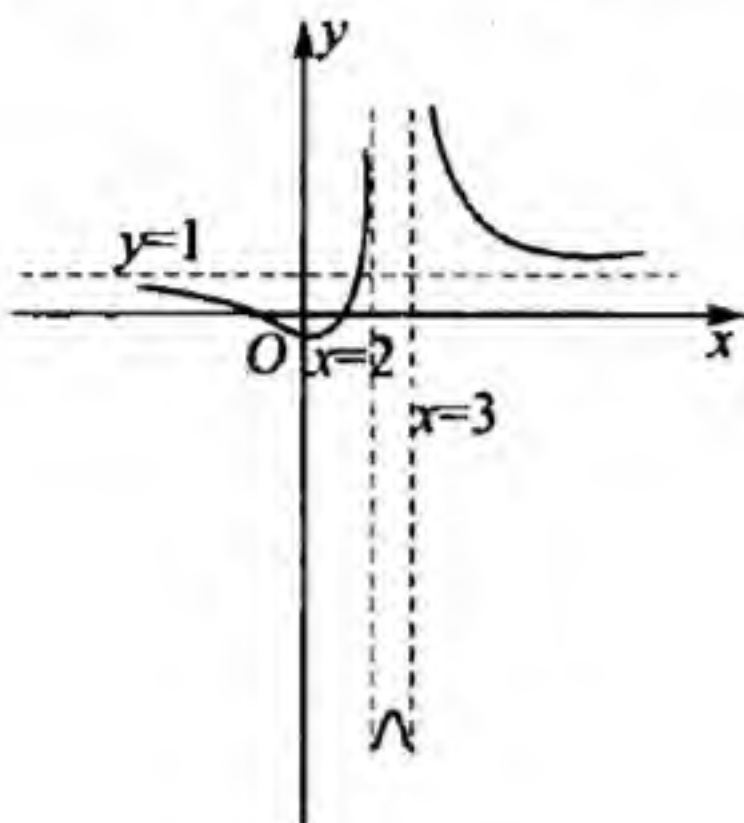
令 $y' = 0$ 得 $x \approx 0.42$, 及 $x \approx 2.38$.



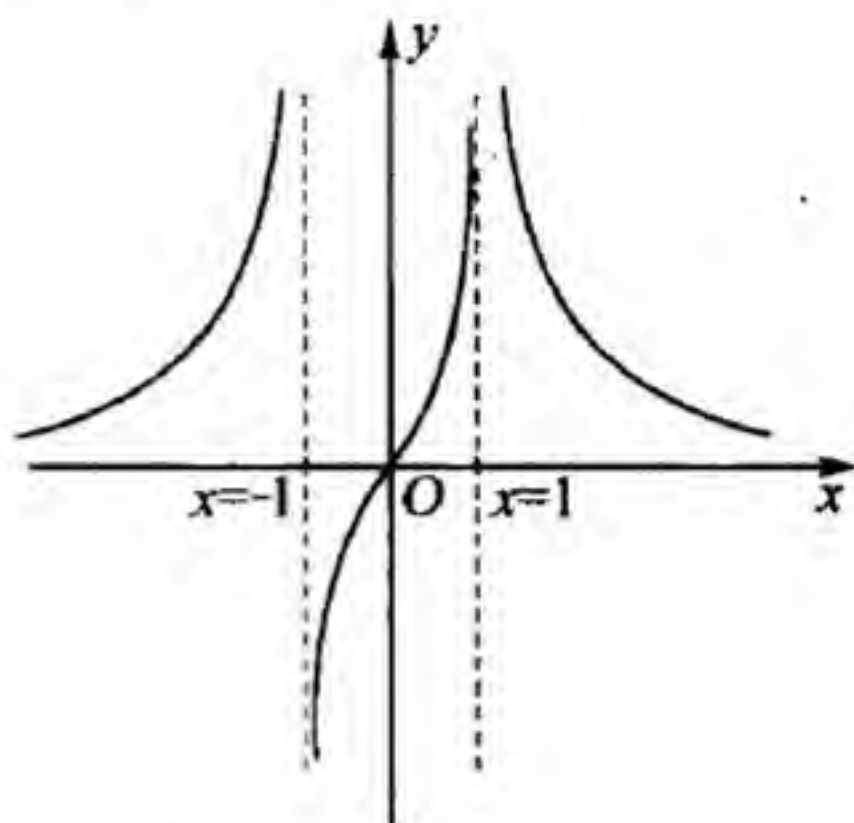
1474 题图

令 $y'' = 0$ 得 $x \approx -0.586$.

经判别知: $y|_{x \approx 0.42} \approx -0.20$ 为极小值, $y|_{x \approx 2.38} \approx -19.80$ 为极大值 $x \approx -0.586, y \approx -0.07$ 为拐点.



1475 题图



1476 题图

【1476*】 $y = \frac{x}{(1+x)(1-x)^2}$.

解 当 $x = 0$ 时, $y = 0$, 渐近线 $y = 0, x = -1, x = 1$,

$$y' = \frac{2x^2 + x + 1}{(1+x)^2(1-x)^3},$$

$$y'' = \frac{2(3x^3 + 3x^2 + 5x + 1)}{(1+x)^3(1-x)^4},$$

$y' = 0$ 无实根. 故无极值点, 令 $y'' = 0$ 得 $x \approx -0.22$, 经判别知它为拐点, 此时 $y \approx -0.20$;

当 $x < -1$ 时, $y' > 0$, 曲线上升;

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$, 曲线上升;

当 $x > 1$ 时, $y' > 0$, 曲线下降.

如 1476 题图.

【1477】 $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.

解 当 $x = 0$ 时, $y = 0$, 垂直渐近线 $x = -1$,

又

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x(1+x)^3} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x(1+x)^3}{(1+x)^3} = -3.$$

所以曲线有斜渐近线: $y = x - 3$.

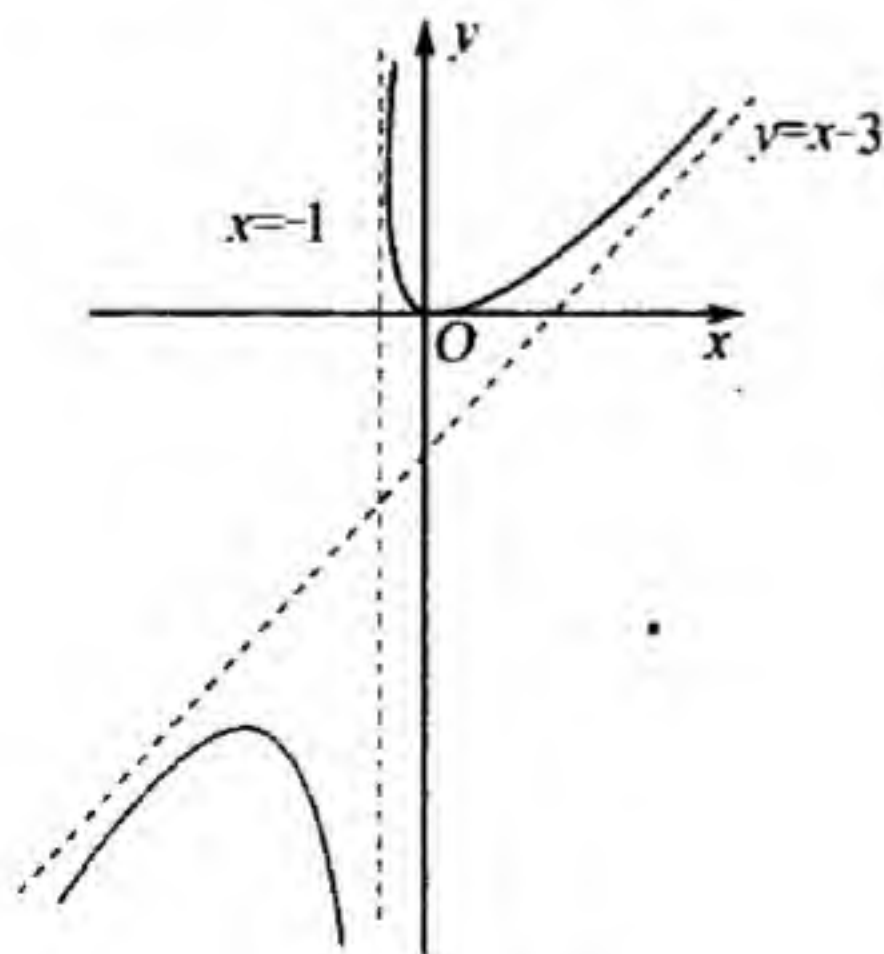
$$y' = \frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}.$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$, 及 $x = -4$,

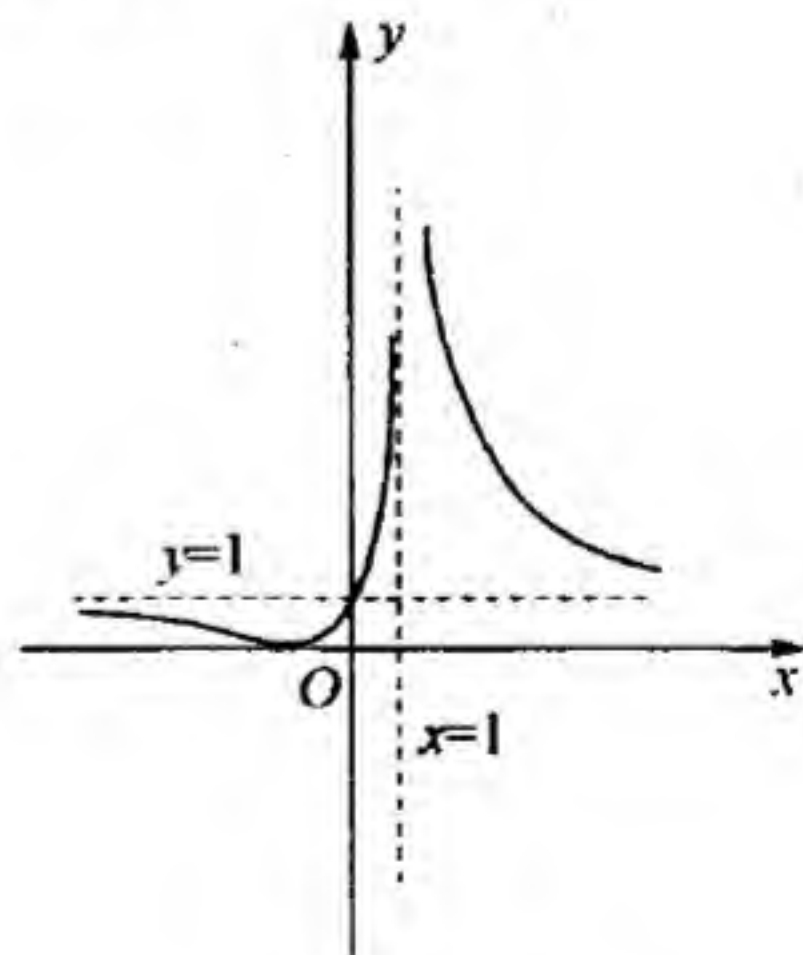
$$y'' = \frac{12x^2}{(1+x)^5}.$$

列表

x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	+	0	-		-	0	+
y''	-	-	-		+	+	+
y	$\nearrow \cup$	极大值	$\searrow \cup$	不连续点	$\searrow \cup$	极小值	$\nearrow \cup$

当 $x = -4$ 时, $y = -9\frac{13}{27}$.当 $x = 0$ 时, $y = 0$. 如 1477 题图所示.

1477 题图



1478 题图

【1478】 $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

解 当 $x = -1$ 时, $y = 0$, 垂直渐近线 $x = 1$, 又

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1,$$

故 $y = 1$ 为曲线的水平渐近线.

$$y' = \frac{8(1+x)^3}{(1-x)^5},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = -1$,

$$y'' = \frac{16(x+1)^2(x+4)}{(1-x)^6},$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = -1$ 及 $x = -4$.

列表

x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	—	—	—	0	+	不存在	—
y''	—	0	+	0	+	不存在	+
y	$\searrow \sim$	拐点	$\searrow \sim$	极小值	$\nearrow \sim$	不连续	$\searrow \sim$

当 $x = -4$ 时, $y = \frac{81}{625}$, 当 $x = -1$ 时, $y = 0$.

当 $x = 0$ 时, $y = 1$.

如 1478 题图所示

【1479】 $y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.

解 当 $x = 0, 1$ 时, $y = 0$, 垂直渐近线为 $x = -1$,

又 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = -3,$

所以 $y = x - 3$ 为曲线的斜渐近线

$$y' = \frac{x(x^2 + 3x - 2)}{(x+1)^3}.$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 及

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \quad y'' = \frac{10x-2}{(x+1)^4}.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = \frac{1}{5}$.

列表

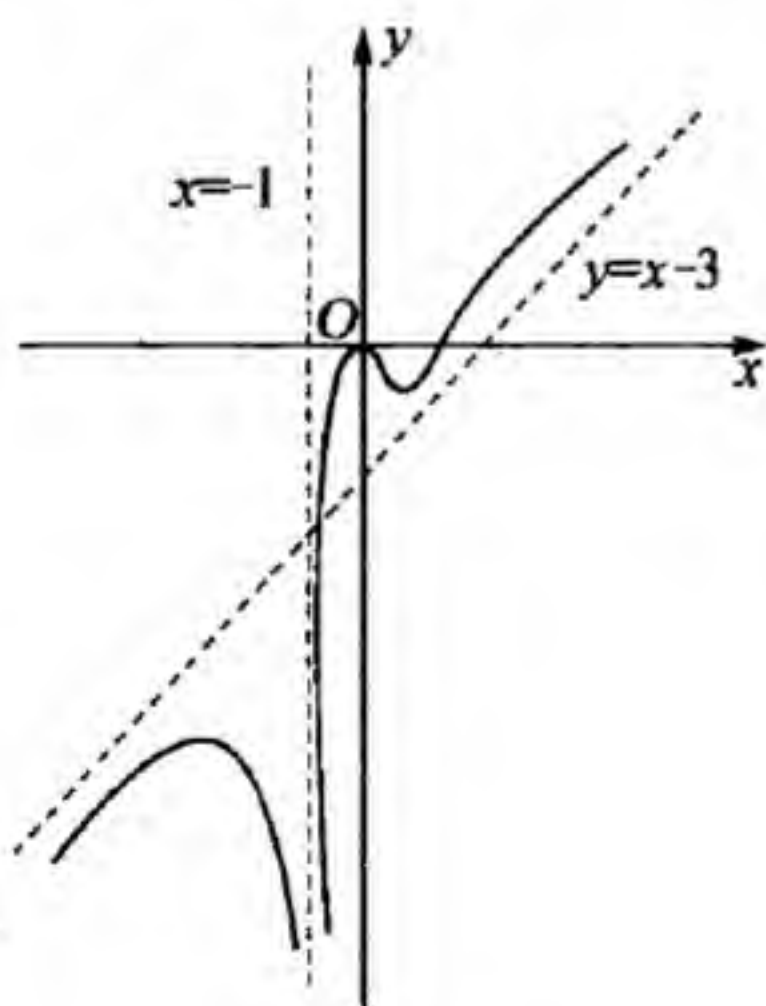
x		$\frac{3-\sqrt{13}}{2}$		-1		0		$\frac{1}{5}$		$\frac{\sqrt{17}-3}{2}$	
y'	+	0	-	不存在	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	不存在	-	-	-	0	+	+	+
y	$\nearrow \cup$	极大值	$\searrow \cup$	不连续	$\nearrow \cup$	极大值	$\searrow \cup$	拐点	$\searrow \cup$	极小值	$\nearrow \cup$

当 $x = -\frac{\sqrt{17}+3}{2} \approx -3.56$ 时, 有极大值 $y \approx -8.82$,

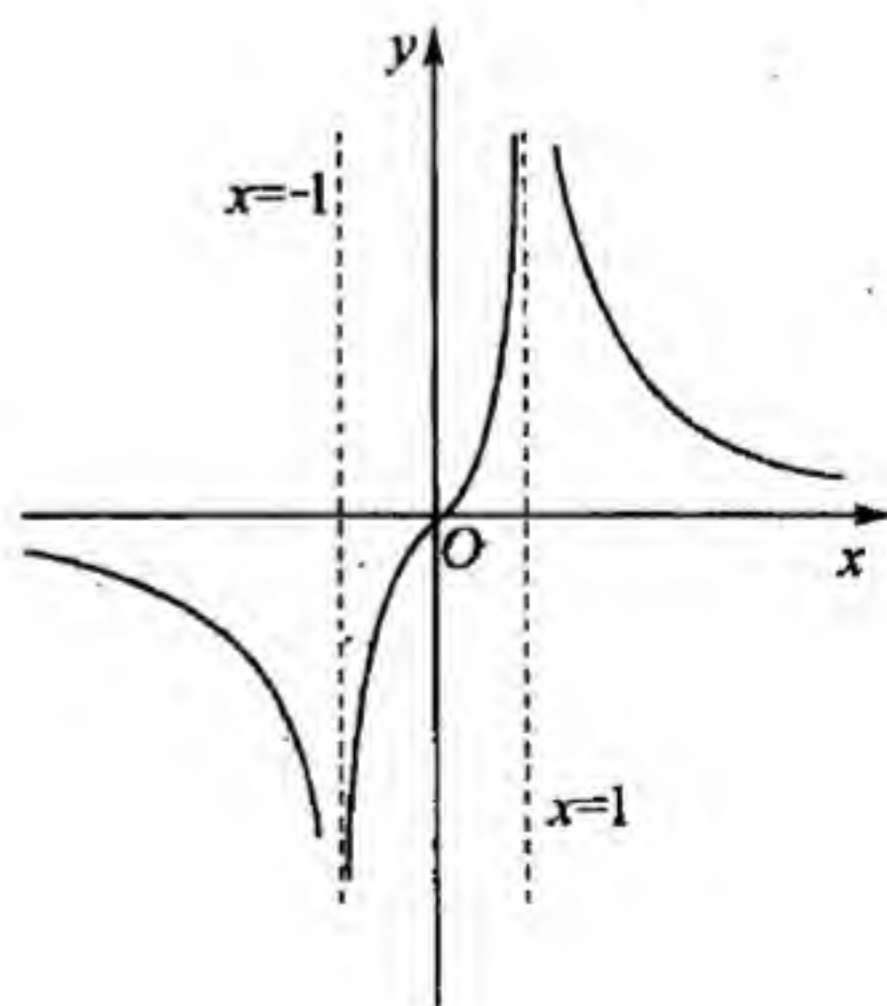
当 $x = 0$ 时, 有极大值 $y = 0$.

当 $x = \frac{\sqrt{17}-3}{2} \approx 0.56$ 时, 极小值 $y \approx -0.06$.

当 $x = \frac{1}{5}$ 时, $y = -\frac{1}{45}$. 如 1479 题图所示.



1479 题图



1480 题图

【1480】 $y = \frac{x}{(1-x^2)^2}$.

解 当 $x = 0$ 时, $y = 0$, 垂直渐近线 $x = -1, x = 1$, 又

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(1-x^2)^2} = 0,$$

所以 $y = 0$, 为曲线的水平渐近线.

函数为奇函数, 图形关于原点对称

$$y' = \frac{3x^2 + 1}{(1-x^2)^3}.$$

$y' = 0$ 无实根, 无极值点

$$y'' = \frac{12x(x^2 + 1)}{(1-x^2)^4},$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$.

列表

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	—	不存在	+	+	+	不存在	—
y''	—	不存在	—	0	+	不存在	+
y	$\searrow \cup$	不连续	$\nearrow \cup$	拐点	$\nearrow \cup$	不连续	$\searrow \cup$

如 1480 题图所示.

【1481】 $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

解 $x = -1$ 时, $y = 0$,

垂直渐近线 $x = 1$,

又 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1,$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = 5,$$

所以 $y = x + 5$ 为曲线的斜渐近线

$$y' = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}.$$

令 $y' = 0$ 得 $x = -1$, 及 $x = 5$,

$$y'' = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4},$$

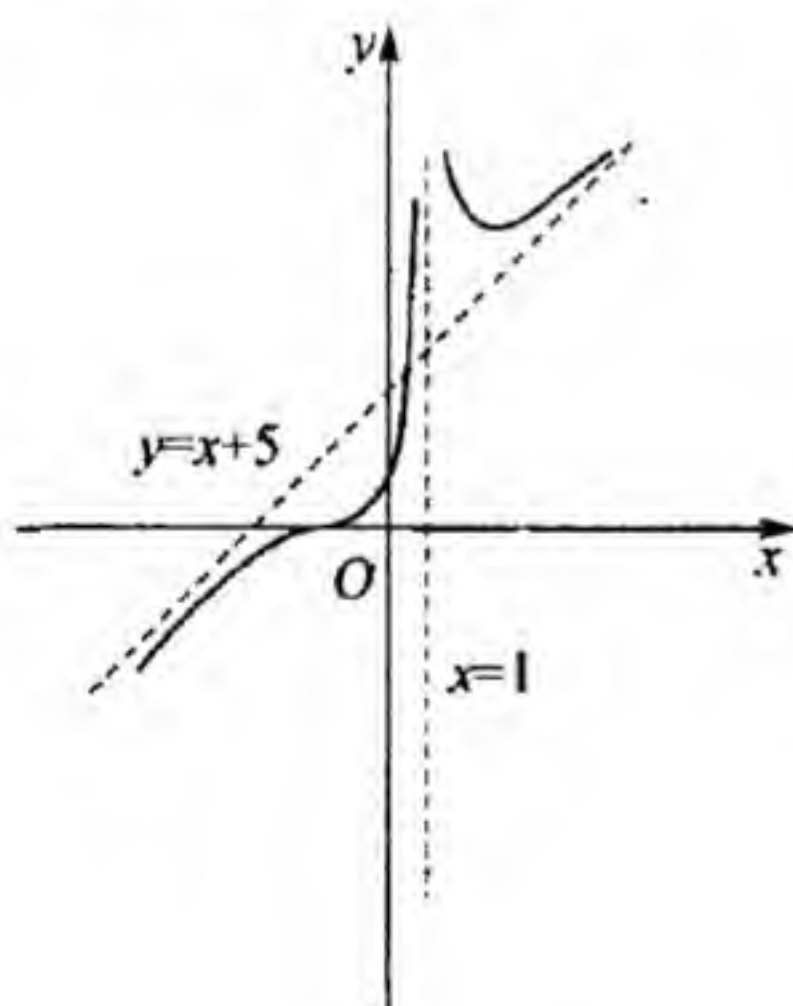
令 $y'' = 0$ 得 $x = -1$.

列表

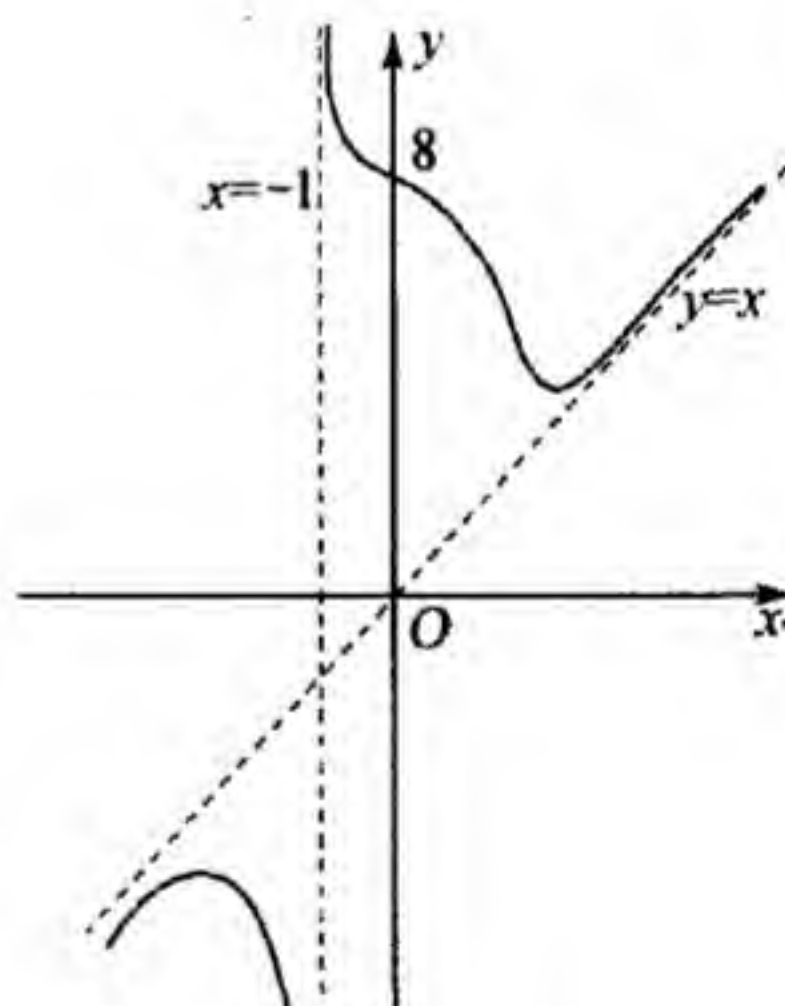
x	$(-\infty, -4)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 5)$	5	$(5, +\infty)$
y'	+	0	+	不存在	-	0	+
y''	-	0	+	不存在	+	+	+
y	$\nearrow \sim$	拐点	$\nearrow \sim$	不连续	$\searrow \sim$	极小值	$\nearrow \sim$

当 $x = 5$ 时, $y = 13\frac{1}{2}$.

如 1481 题图所示



1481 题图



1482 题图

【1482*】 $y = \frac{x^4 + 8}{x^3 + 1}$

解 垂直渐近线: $x = -1$,

又 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = 0,$

所以 $y = x$ 为曲线的斜渐近线

$$y' = \frac{x^6 + 4x^3 - 24x^2}{(x^3 + 1)^2},$$

$$y'' = \frac{-6x^5 + 96x^4 + 12x^2 - 48x}{(x^3 + 1)^3}.$$

令 $y' = 0$, 得 $x = 0, x = 2$ 及 $x \approx -2.4$.

$y''|_{x=2} > 0$, 故当 $x = 2$ 时有极小值 $y = 2\frac{2}{3}$,

$y''|_{x \approx -2.4} < 0$, 故当 $x \approx -2.4$ 时有极大值 $y \approx -3.2$,
 $x = 0$ 为拐点.

又 $y''|_{x=\frac{1}{2}} < 0, y''|_{x=1} > 0$,

故在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内还有一拐点 x .

如 1482 题图所示.

【1483】 $y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}.$

解 图形关于 Oy 轴对称且 $x = \pm \frac{\sqrt{10}}{4} \approx \pm 0.79$ 时, $y = 0$

垂直渐近线 $x = -1, x = 0, x = 1$, 又 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$, 所以, $y = 0$ 为
 曲线的水平渐近线.







$$y' = \frac{4(8x^4 - 10x^2 + 5)}{3x^3(1-x^2)^2},$$

$y' = 0$ 无实根. 所以无极值点

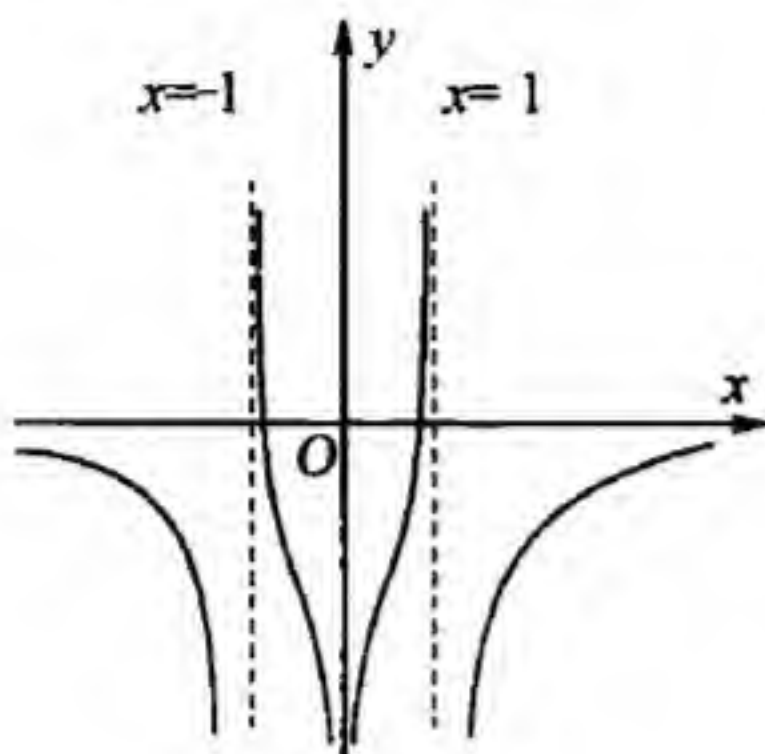
$$y'' = \frac{4(24x^6 - 42x^4 + 45x^2 - 15)}{3x^4(1-x^2)^3},$$

令 $y'' = 0$ 解得 $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \approx \pm 0.71$.

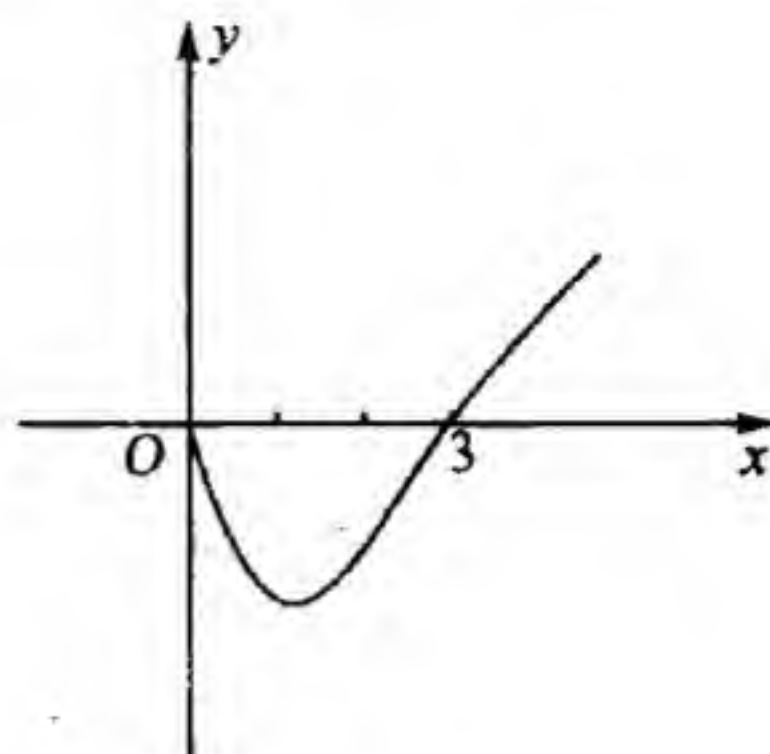
列表

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$	0	$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	-	不存在	-	-	-	不存在	+	-	+	不存在	+
y''	-	不存在	+	0	-	不存在	-	0	+	不存在	-
y		不连续		拐点		不连续		拐点		不连续	

如 1483 题图所示.



1483 题图



1484 题图

【1484】 $y = (x-3)\sqrt{x}$.

解 定义域: $[0, +\infty)$

当 $x = 0, x = 3$ 时, $y = 0$

$$y' = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}.$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 1$. 此时 $y = -2$.

$$y'' = \frac{3(x+1)}{4x\sqrt{x}} > 0 (x > 0).$$

列表

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	+	0	+
y''	+	+	+
y	↘~	极小值	↗~

如 1484 题图所示.

【1485】 $y = \pm \sqrt{8x^2 - x^4}$.

解 定义域

$$|x| \leq 2\sqrt{2}.$$

当 $x = 0, \pm\sqrt{2}$ 时, $y = 0$, 图形关于坐标轴及坐标原点对称.

下面就第一象限讨论

$$y' = \frac{2(4-x^2)}{\sqrt{8-x^2}}.$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 2$,

$$y'' = \frac{2x(x^2-12)}{(8-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

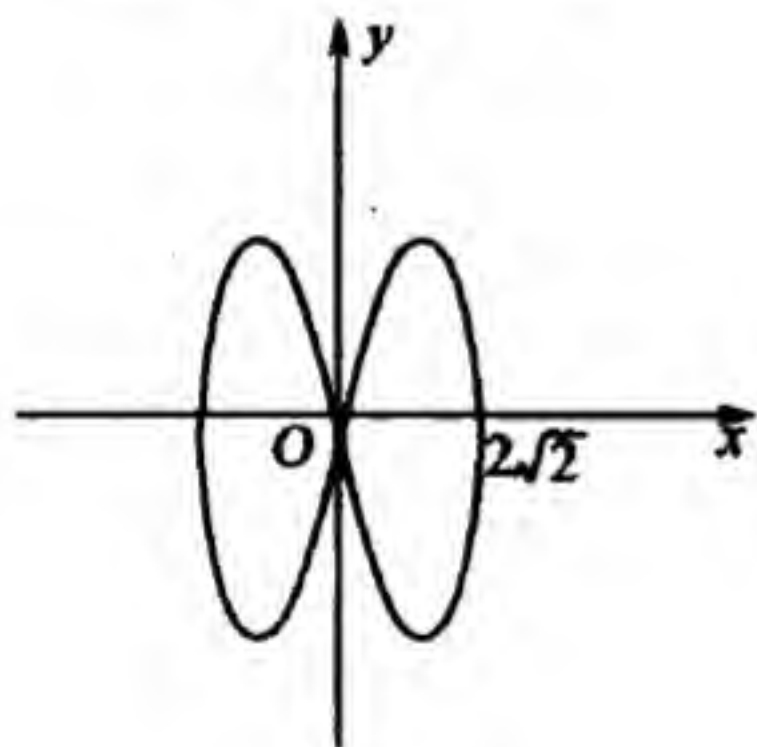
令 $y'' = 0$ 得 $x = 2\sqrt{3}$ 及 $x = 0$. $x = 2\sqrt{3}$ 不在定义域内.

对于 $x = 0$, 如果将曲线由第三象限穿向第一象限看成一支曲线的话, 则也可理解为拐点.

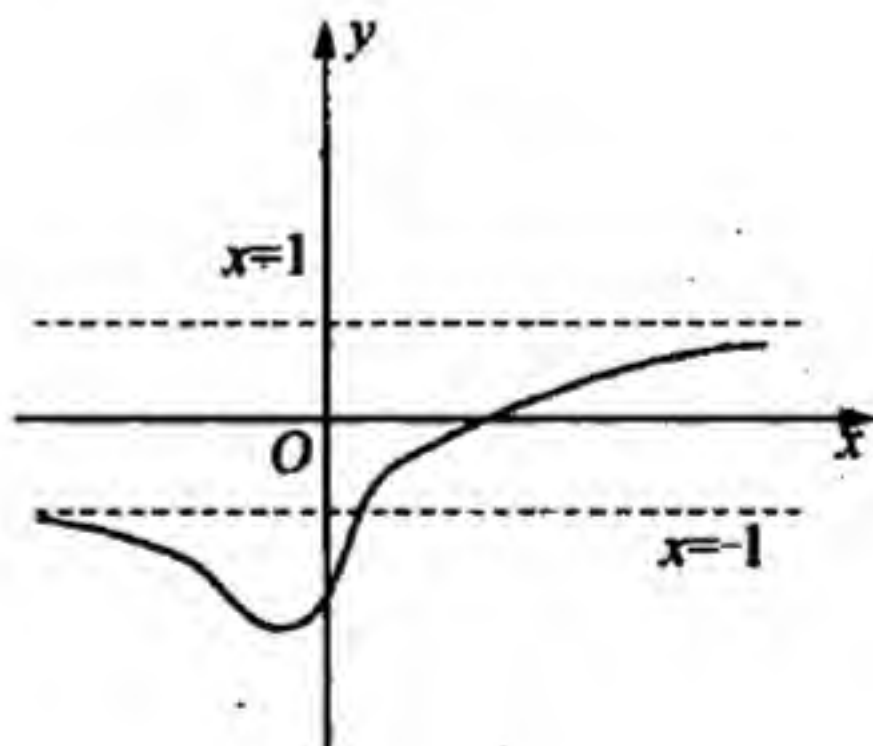
当 $0 < x < 2$ 时, $y' > 0$, 当 $2 < x < 2\sqrt{2}$ 时 $y' < 0$,
故当 $x = 2$ 时, 有极大值 $y = 4$.

利用对称性, 可作出位于其它象限的曲线.

如 1485 题图所示.



1485 题图



1485.1 题图

【1485.1】 $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

解 当 $x = 2$ 时, $y = 0$,

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1$,

所以 $y = \pm 1$ 为曲线的水平渐近线

$$y' = \frac{2x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

令 $y' = 0$, 得 $x = -\frac{1}{2}$. 此时 $y = -\sqrt{5} \approx -2.24$,

$$y'' = -\frac{4x^2+3x-2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = -\frac{3 \pm \sqrt{41}}{8}$,

即 $x_1 = -\frac{3 + \sqrt{41}}{8} \approx -1.18$,

$$x_2 = -\frac{3 - \sqrt{41}}{8} \approx 0.42.$$

列表

x	$(-\infty, -x)$	x_1	$(x_1, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, x_2)$	x_2	$(x_2, +\infty)$
y'	-	-	-	0	+	+	+
y''	-	0	+	+	+	0	-
y	$\searrow \cup$	拐点	$\searrow \cup$	极小值	$\nearrow \cup$	拐点	$\searrow \cup$

如 1485.1 题图所示.

【1486】 $y = \pm \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

解 定义域为 $[1, 2] \cup [3, +\infty)$.

当 $x = 1, 2, 3$ 时, $y = 0$.

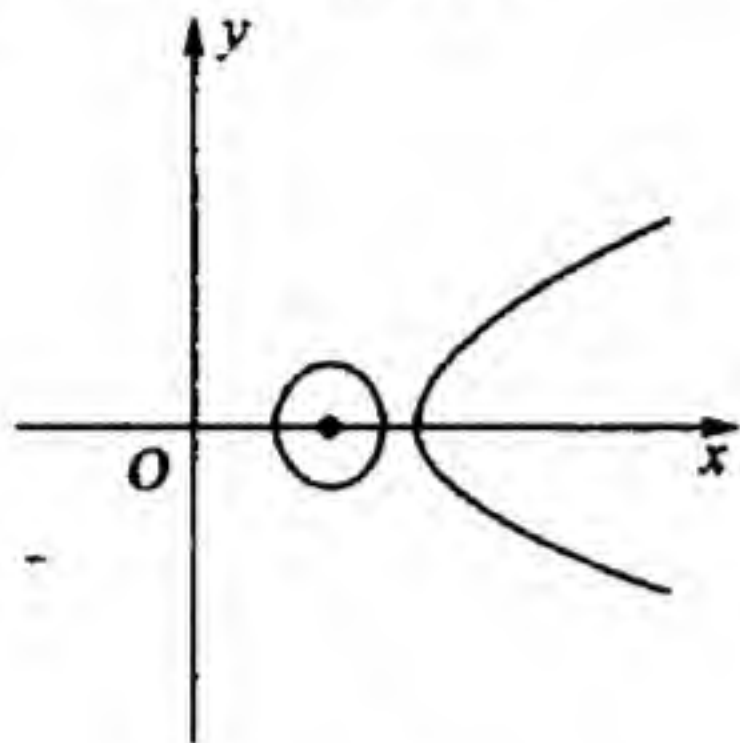
图形关于 Ox 轴对称. 下面就第一象限讨论

$$y' = \frac{3x^2 - 12x + 11}{2\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}},$$

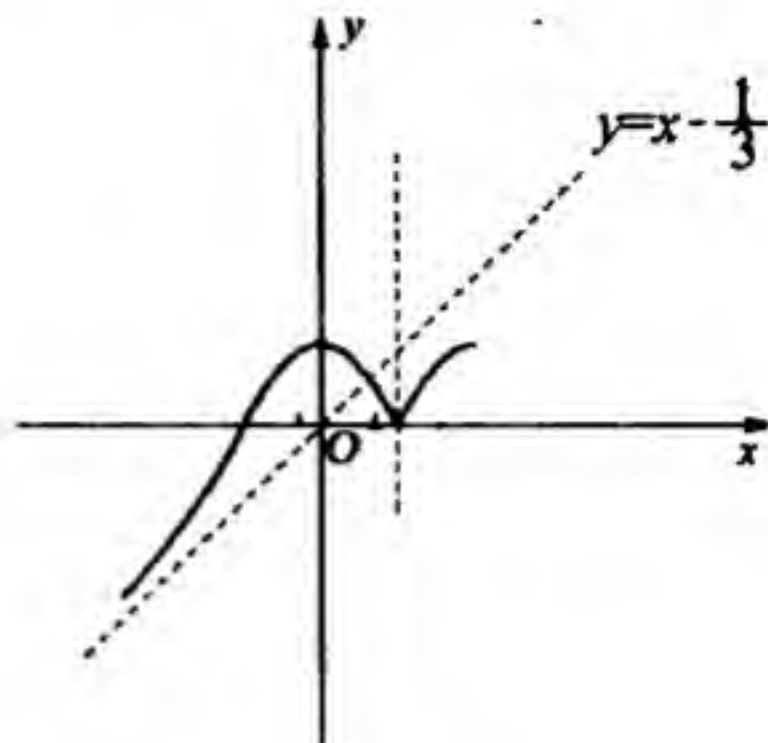
令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{6 - \sqrt{3}}{3} \approx 1.42$,

经判别, 此时有极大值 $y = \frac{1}{3} \sqrt[4]{12} \approx 0.62$.

$y'' < 0$, 故无拐点. 曲线呈凸状, 当 $x > 3$ 时, $y' > 0$, 曲线上升. 如 1486 题图所示.



1486 题图



1487 题图

【1487*】 $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$.

解 当 $x = \pm 1$ 时, $y = 0$, 当 $x = 0$ 时, $y = 1$, 又

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1} - x) \\ &= -\frac{1}{3}, \end{aligned}$$

所以 $y = x - \frac{1}{3}$ 为曲线的渐近线

$$y' = \frac{3x^2 - 2x - 1}{3 \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}^2}$$

令 $y' = 0$ 得 $x = -\frac{1}{3}$ 及 $x = 1$.

当 $x = \pm 1$ 时, $y' = \infty$,

$$y'' = -\frac{8}{9} \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}}}.$$

当 $x = \pm 1$ 时 $y'' = \infty$.

列表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$+$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$
y''	$+$	∞	$-$	$-$	$-$	∞	$-$
y	$\nearrow \sim$	拐点	$\nearrow \sim$	极大值	$\searrow \sim$	极小值	$\nearrow \sim$

当 $x = -\frac{1}{3}$ 时, $y \approx 1.06$. 如 1487 题图.

【1488】 $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

解 图形关于 Oy 轴对称

$$y' = \frac{2}{3} \frac{(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}}},$$

$y' = 0$ 无实根.

$$y' \big|_{x=-0} = -\infty,$$

$$y' \big|_{x=+0} = +\infty,$$

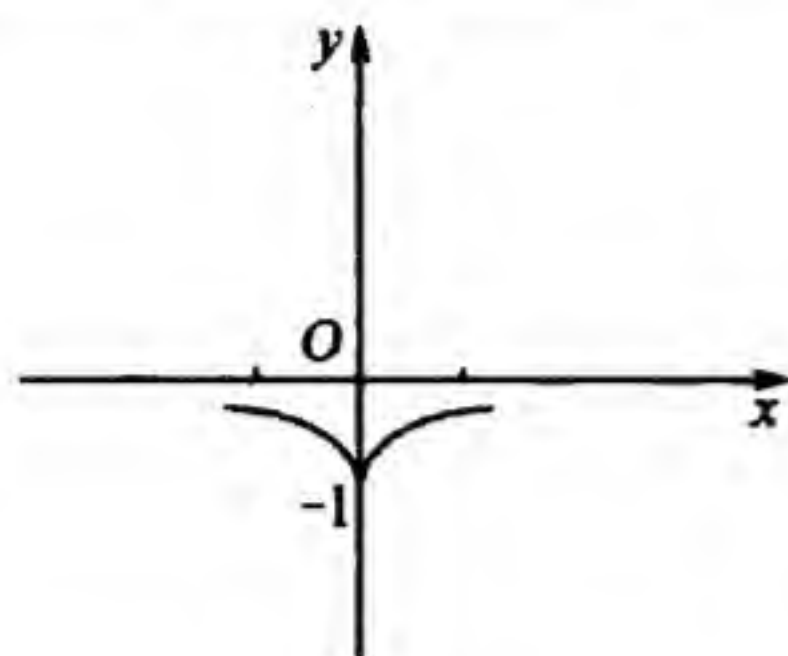
$$y'' = -\frac{2}{9} \frac{(x^2 + 1)^{\frac{5}{3}} + (3 - x^2)x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}(x^2 + 1)^{\frac{5}{3}}} < 0,$$

故曲线呈凸状. 又 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$, 故 $y = 0$ 为曲线渐近线.

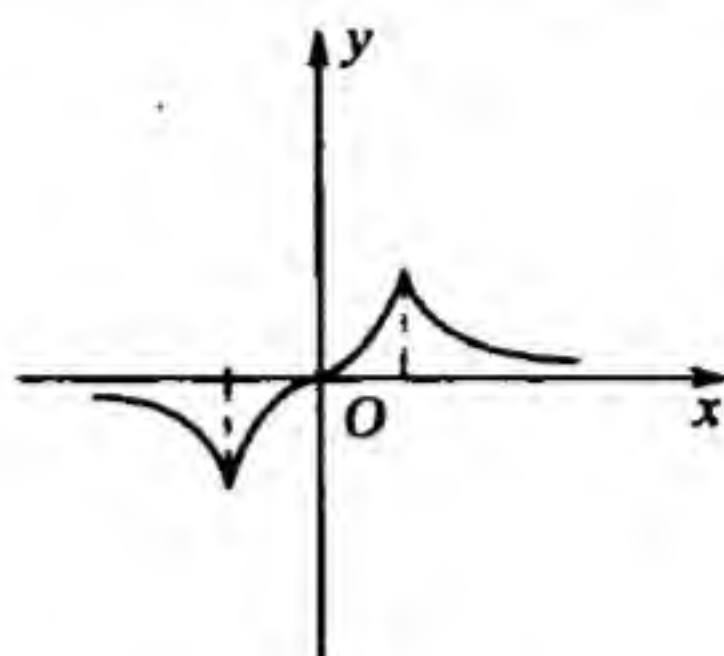
列表

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	$-$	不存在	$+$
y''	$-$	不存在	$-$
y	$\searrow \sim$	极小值	$\nearrow \sim$

当 $x = 0, y = -1$. 如 1488 题图.



1488 题图



1489 题图

【1489】 $y = (x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}}$.

解 函数为奇函数, 图形关于坐标原点对称.

当 $x=0$ 时, $y=0$, 又 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$, 所以 $y=0$ 为曲线的渐近线

$$y' = \frac{2}{3} \frac{(x-2)^{\frac{1}{3}} - (x+2)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}},$$

$y' = 0$ 无实根.

当 $x = \pm 2$ 时, $y' = \infty$

$$y'' = \frac{2}{9} \frac{(x+2)^{-\frac{2}{3}} - (x-2)^{-\frac{2}{3}}}{(x+2)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{4}{3}}},$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = 0$.

列表

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	$-$	∞	$+$	$+$	$+$	∞	$-$
y''	$-$	∞	$-$	0	$+$	∞	$+$
y	$\searrow \sim$	最小值	$\nearrow \sim$	拐点	$\nearrow \sim$	最大值	$\searrow \sim$

当 $x = -2$ 时, $y = -\sqrt[3]{16}$,

当 $x = 2$ 时, $y = \sqrt[3]{16}$. 如 1489 题所示.

【1490】 $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$.

解 函数为偶函数, 图形关于 Oy 轴对称

$$y' = \frac{2}{3} \left[\frac{(x-1)^{\frac{1}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}}{(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}} \right],$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$.

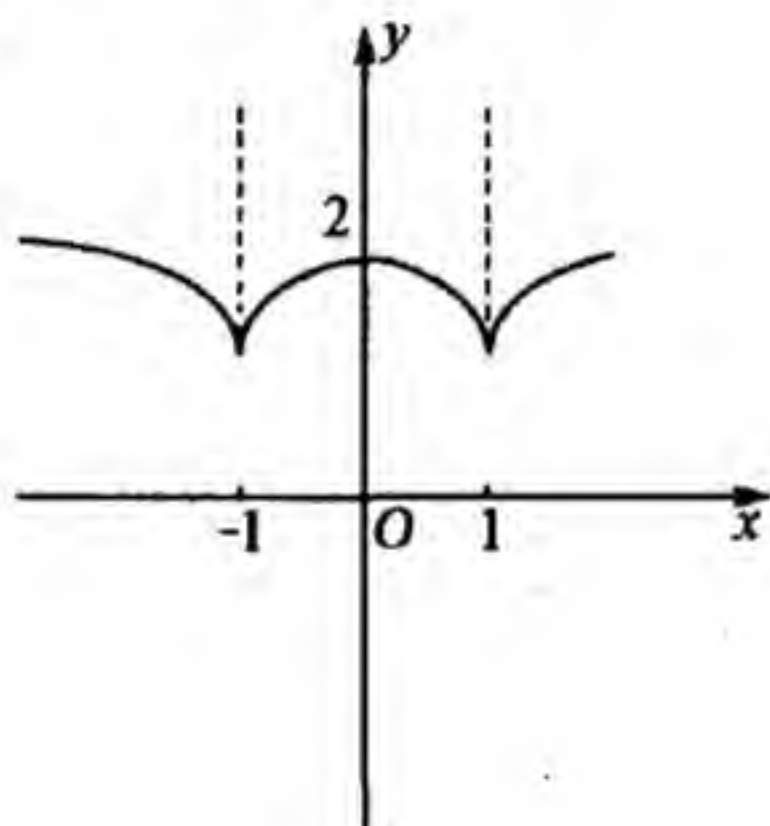
当 $x = \pm 1$ 时, $y' = \infty$,

$$y'' = -\frac{2}{9} \left[\frac{1}{(x+1)^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}} \right] < 0,$$

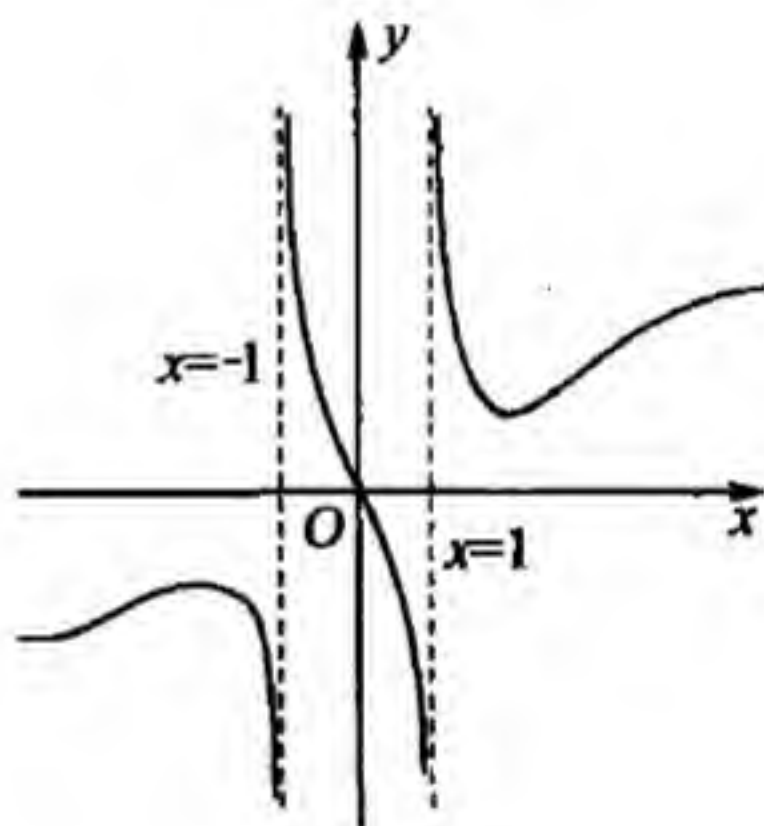
曲线始终呈凸状. 当 $x = \pm 1$ 时, y 取最小值 $\sqrt[3]{4}$.

当 $x = 0$, 有极大值 $y = 2$.

如 1490 题图所示.



1490 题图



1491 题图

【1491】 $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

解 函数为奇函数, 图形关于坐标原点对称.

当 $x = 0$ 时, $y = 0$, 垂直渐近线 $x = \pm 1$,

$$y' = \frac{x^2 - 3}{3(x^2 - 1)^{\frac{4}{3}}},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = \pm\sqrt{3}$,

$$y'' = -\frac{2x(x^2 - 9)}{9(x^2 - 1)^{\frac{7}{3}}},$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$, 及 $x = \pm 3$.

列表

x	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	-	-	-	∞	-	0	+	+	+
y''	+	0	-	∞	+	+	+	0	-
y	$\searrow \sim$	拐点	$\searrow \sim$	间断性	$\searrow \sim$	极大值	$\nearrow \sim$	拐点	$\nearrow \sim$

当 $x = \pm\sqrt{3}$ 时, $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \approx 1.38$.

当 $x = \pm 3$ 时, $y = \pm 1 \frac{1}{2}$.

如 1491 题图所示.

【1492】 $y = \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{2x^2 - 1}$.

解 存在域: $|x| \geq 1$ 图形关于 Oy 轴对称, 且 $y \geq 0$ 即图形在 Ox 轴的上方, 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(y - \frac{1}{2}x \right) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = -\frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(y + \frac{1}{2}x \right) = 0,$$

所以 $y = \pm \frac{1}{2}x$ 为曲线的渐近线

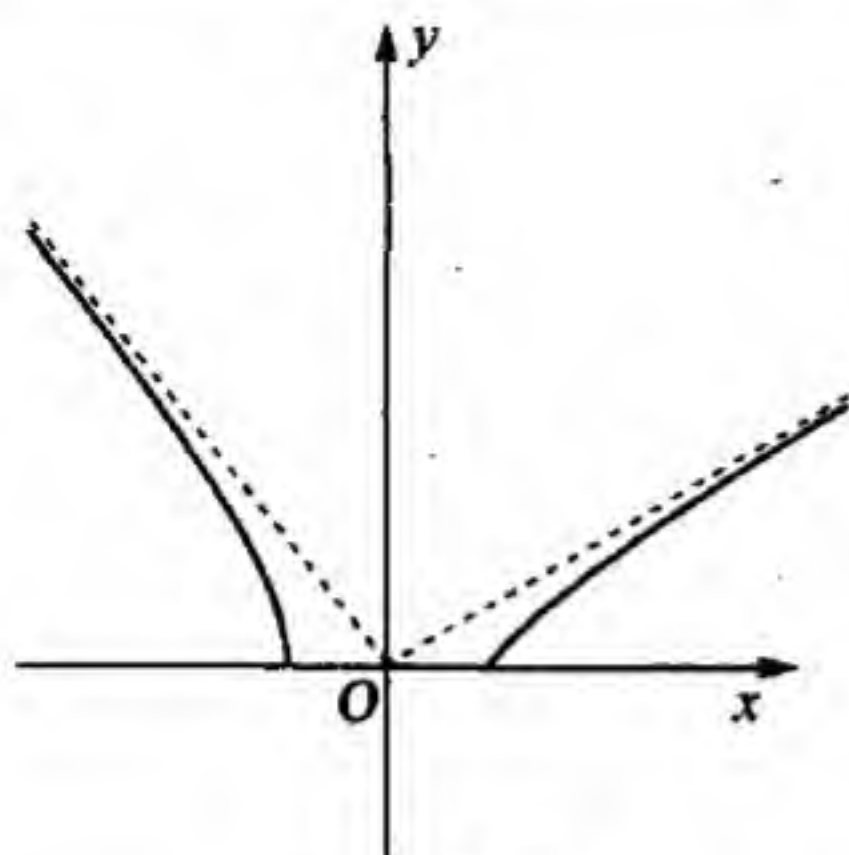
$$y' = \frac{2x^5 - 3x^2 + 2x}{(2x^2 - 1)^2 \sqrt{x^2 - 1}},$$

$$y'' = \frac{-12x^6 + 18x^5 - 6x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 6x + 2}{(2x^2 - 1)^3 (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

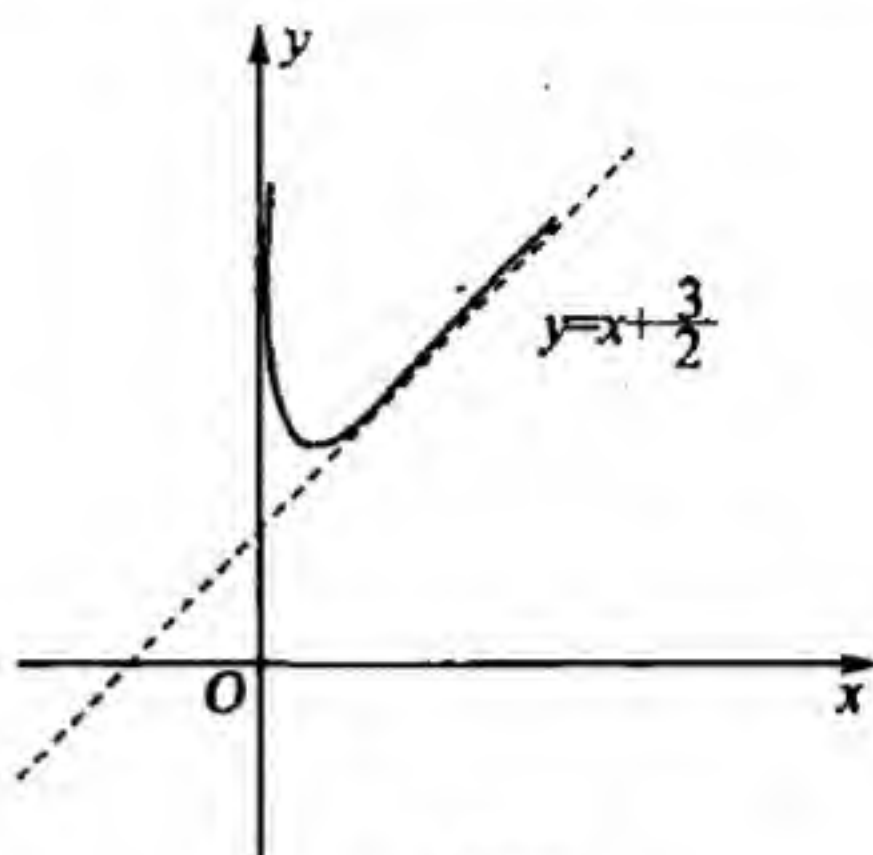
当 $x > 1$ 时, $y' > 0$, $y'' < 0$. 故当 $x > 1$ 时, 曲线上升呈凸状

当 $x = \pm 1$ 时, 有边界极小值 $y = 0$.

如 1492 题图所示.



1492 题图



1493 题图

【1493】 $y = \frac{|1+x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$.

解 存在域: $x > 0$, 垂直渐近线 $x = 0$, 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \frac{3}{2},$$

故 $y = x + \frac{3}{2}$ 为曲线渐近线

$$y' = \frac{(2x-1)\sqrt{x+1}}{2x\sqrt{x}}.$$

令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{2}$,

$$y'' = \frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}}} > 0,$$

故曲线是凹的. 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 有极小值 $y = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2.60$.

如 1493 题图所示.

【1494】 $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$.

解 定义域为 $(-\infty, -3) \cup [0, +\infty)$.

当 $x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \approx 4.30$ 时, $y = 0$, 垂直渐近线为 $x = -3$. 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - (x-1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} + (x-1)} = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = -2,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (y+2x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1+x+\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - (x+1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x - 1} = \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

故 $y = -\frac{1}{2}$ 及 $y = -2x + \frac{5}{2}$ 为曲线的渐近线

$$y' = -1 + \frac{\sqrt{x}(2x+9)}{2(x+3)^{\frac{3}{2}}}.$$

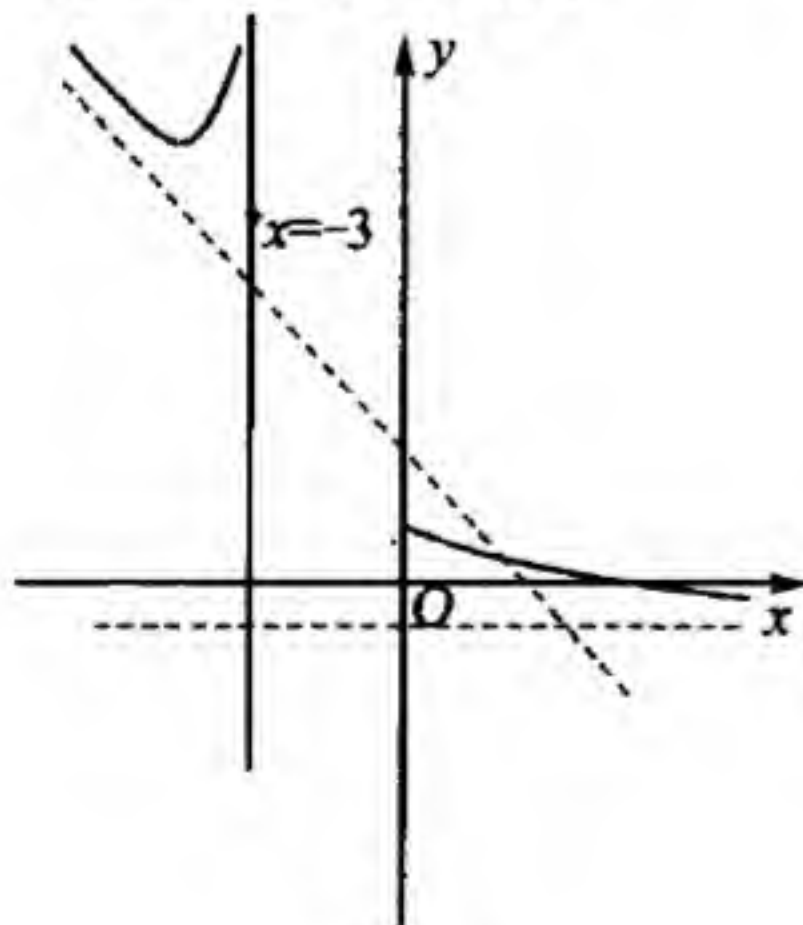
令 $y' = 0$ 得 $x = -4$.

$$y'' = \frac{27}{4(x+3)^2 \sqrt{x(x+3)}} > 0,$$

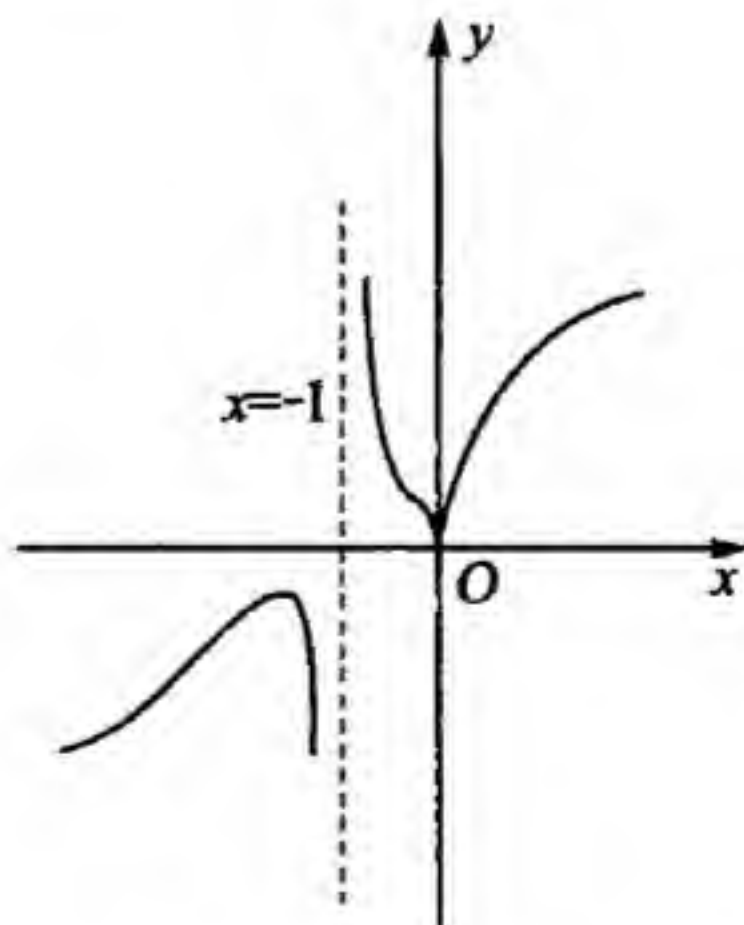
故曲线呈凹状, 当 $x = -4$ 时, 有极小值 $y = 13$.

当 $x = 0$ 时, 有边界极大值 $y = 1$.

如 1494 题图所示.



1494 题图



1495 题图

【1495】 $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$.

解 当 $x = 0$ 时, $y = 0$.

垂直渐近线: $x = -1$,

$$y' = \frac{x+2}{3(x+1)\sqrt[3]{x(x+1)}}.$$

令 $y' = 0$ 得 $x = -2$.

当 $x = 0$ 时, $y' = \infty$,

$$y'' = -\frac{2(x^2 + 4x + 1)}{9x(x+1)^2\sqrt[3]{x(x+1)}}.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = -2 \pm \sqrt{3}$,

经判别当 $x = 0$ 时, 有极小值 $y = 0$,

当 $x = -2$ 时, 有极大值 $y = -\sqrt[3]{4} \approx -1.59$,

拐点 $x = -2 + \sqrt{3} \approx -0.27$. 此时 $y \approx 0.46$,

$x = -2 - \sqrt{3} \approx -3.73$. 此时 $y \approx -1.72$.

如 1495 题图所示.

【1496*】 $y = \sqrt{\frac{x^4 + 3}{x^2 + 1}}$.

解 函数为偶函数, 图形关于 Oy 轴对称, 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (y + x) = 0,$$

所以 $y = x$ 及 $y = -x$ 为曲线的渐近线

$$y' = \frac{x(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x^4+3)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

令 $y' = 0$, 得 $x = 0$ 及 $x = \pm 1$.

经判别, 当 $x = 0$ 时, 有极大值 $y = \sqrt{3}$.

当 $x = \pm 1$ 时有极小值 $y = \sqrt{2}$,

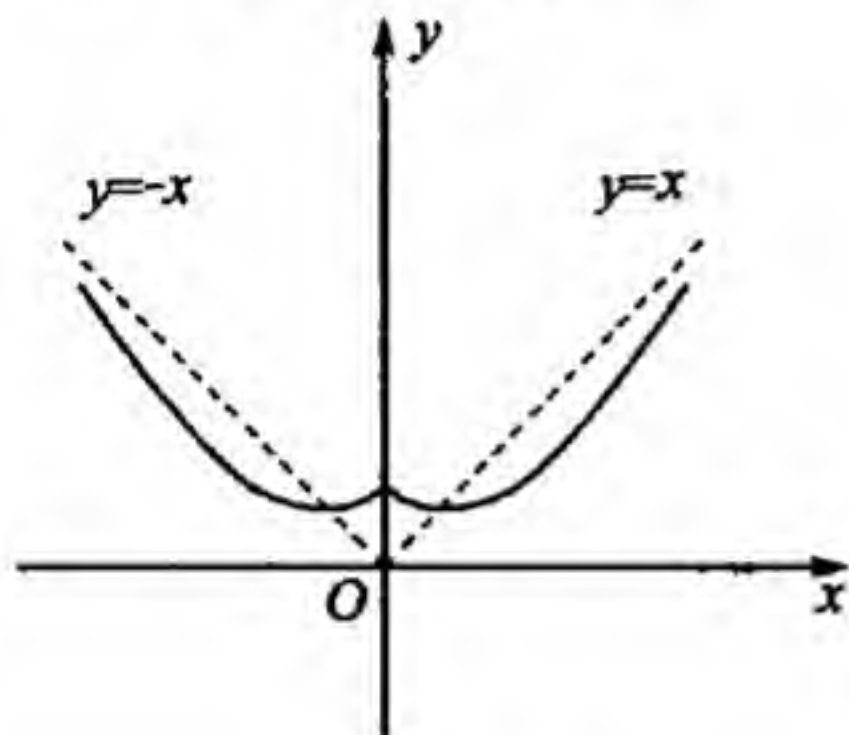
$$y'' = \frac{-x^8 + 20x^6 + 18x^4 + 36x^2 - 9}{(x^4+3)^{\frac{3}{2}}(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x \approx \pm 0.47$ 及 $x \approx \pm 4.58$, 经判别均为拐点.

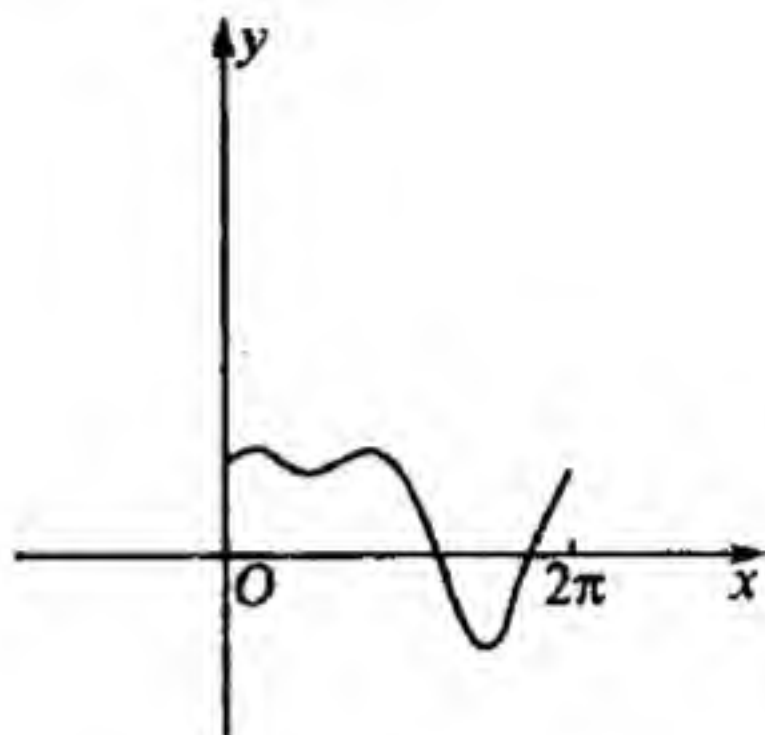
当 $x \approx \pm 0.47$ 时, $y \approx 1.14$.

当 $x \approx \pm 4.58$ 时, $y \approx 4.45$.

如 1496 题图所示.



1496 题图



1497 题图

【1497】 $y = \sin x + \cos^2 x$.

解 函数是以 2π 为周期的函数

零点: $x = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1.21\pi,$

$$x = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1.79\pi,$$

$$y' = \cos x(1 - 2\sin x).$$

令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ 及 $\frac{3\pi}{2}$,

$$y'' = -\sin x - 2\cos 2x = 4\sin^2 x - \sin x - 2.$$

令 $y'' = 0$ 得

$$x_1 = \arcsin \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \approx 0.32\pi,$$

此时 $y_1 \approx 1.13$,

$$x_2 = \pi - \arcsin \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \approx 0.68\pi,$$

此时 $y_2 \approx 1.13$,

$$x_3 = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{33}-1}{8} \approx 1.20\pi,$$

此时 $y_3 \approx 0.055$,

$$x_4 = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{33}-1}{8} \approx 1.80\pi,$$

此时 $y_4 \approx 0.055$,

经判别, x_1, x_2, x_3, x_4 均为拐点.

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, 有极小值 $y = 1$.

当 $x = \frac{3\pi}{2}$ 时, 有极小值 $y = -1$.

当 $x = \frac{\pi}{6}$ 和 $x = \frac{5\pi}{6}$ 时, 有极大值 $y = 1\frac{1}{4}$.

如 1497 题图所示.

【1498】 $y = (7 + 2\cos x)\sin x$.

解 图形关于原点对称, 函数的周期 $T = 2\pi$

讨论一个周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内的图形

零点: $x = 0, \pm\pi, y' = 7\cos x + 2\cos 2x$.

令 $y' = 0$, 解之得

$$x_1 = \arccos \frac{1}{4} \approx 0.42\pi,$$

$$x_2 = -\arccos \frac{1}{4} \approx -0.42\pi,$$

$$y'' = -7\sin x - 4\sin 2x.$$

令 $y'' = 0$, 解之得

$$x_3 = 0,$$

此时 $y_3 = 0$,

$$x_{4,5} = \pm \arccos\left(-\frac{7}{8}\right) \approx \pm 0.84\pi,$$

此时 $y_{4,5} \approx \pm 2.54, x_{6,7} = \pm\pi$,

此时 $y_{6,7} = 0$.

经判别, x_3, x_4, x_5, x_6 和 x_7 均为拐点.

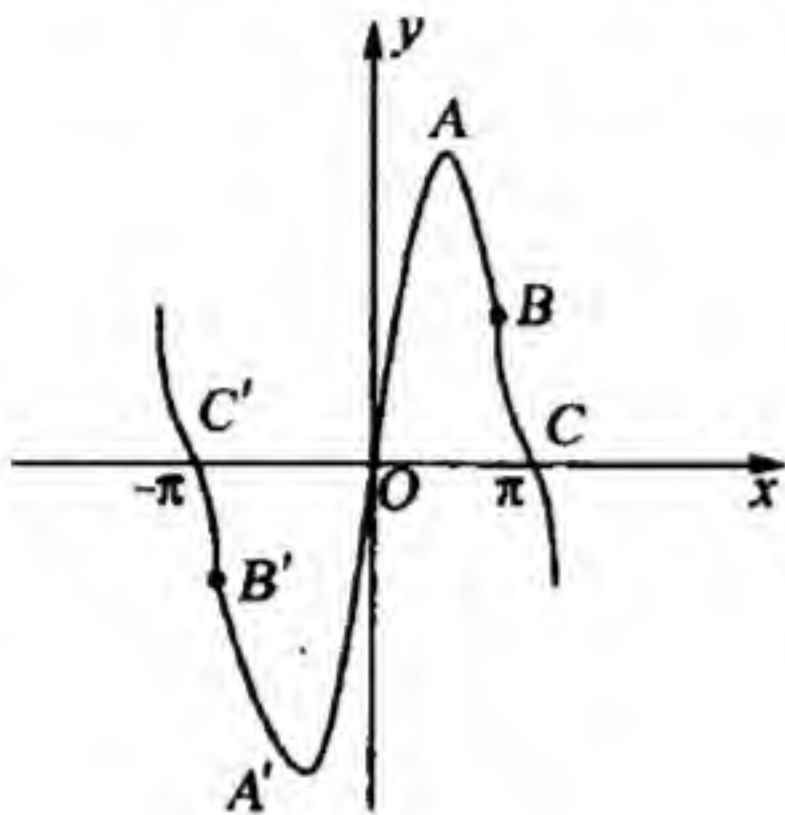
当 $x = -\arccos \frac{1}{4}$ 时, 有极小值 $y = -\frac{15}{8}\sqrt{15} \approx -7.26$.

当 $x = -\arccos \frac{1}{4}$ 时, 有极大值 $y = \frac{15}{8} \sqrt{15} \approx 7.26$.

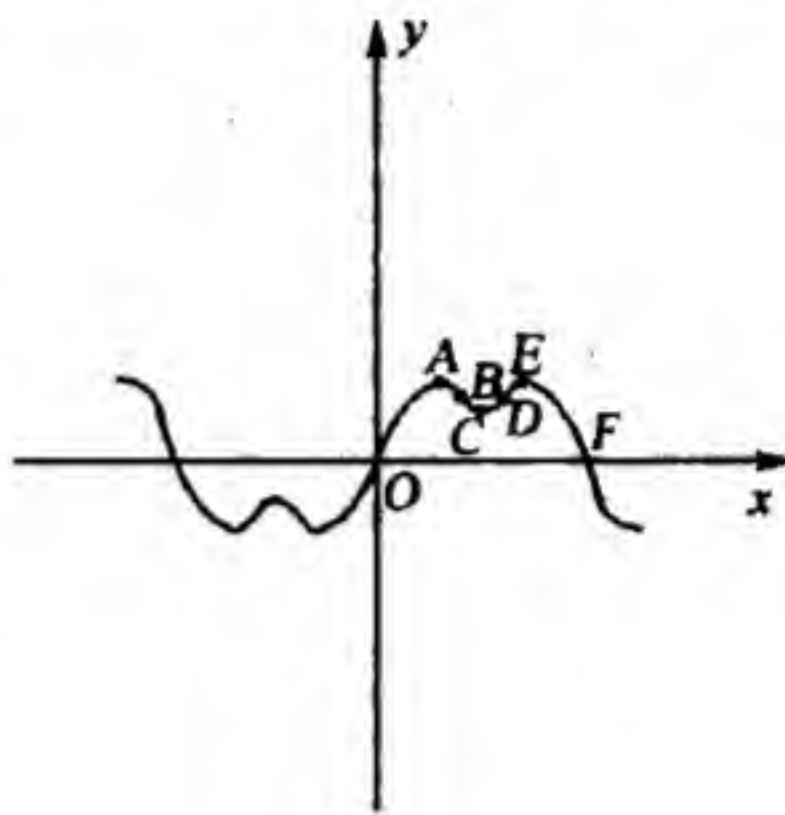
如 1498 题图所示. 图中主要点的坐标

$A(0.42\pi, 7.26)$, $B(0.84\pi, 2.54)$, $C(\pi, 0)$,

$A'(-0.42\pi, 7.26)$, $B'(-0.84\pi, 2.54)$, $C'(-\pi, 0)$.



1498 题图



1499 题图

【1499】 $y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$.

解 图形关于原点对称, 函数的周期 $T = 2\pi$. 讨论函数在一个周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内的图形.

零点: $x = 0, x = \pm\pi, y' = \cos x + \cos 3x$.

令 $y' = 0$. 解得

$$x = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4},$$

$$y'' = -\sin x - 3\sin x.$$

令 $y'' = 0$ 解得

$$x_1 = 0,$$

$$x_{2,3} = \pm \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \approx \pm 0.37\pi,$$

$$x_{4,5} = \pm \left(\pi - \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \right) \approx \pm 0.63\pi,$$

$$x_{6,7} = \pm \pi.$$

经判别: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ 均为拐点.

当 $x = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$ 时, 有极小值

$$y = -\frac{2}{3}\sqrt{2} \approx -0.94.$$

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, 有极小值 $y = \frac{2}{3}$.

当 $x = -\frac{\pi}{2}$ 时, 有极大值 $y = -\frac{2}{3}$.

当 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ 时, 有极大值

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0.94.$$

如 1499 题图所示. 图中主要点的坐标:

$$A(\frac{\pi}{4}, 0.94), \quad B(0.37\pi, 0.81), \quad C(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}),$$

$$D(0.63\pi, 0.84), \quad E(\frac{3\pi}{4}, 0.94), \quad F(\pi, 0).$$

【1500】 $y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x.$

解 图形关于 Oy 轴对称, 函数的周期 $T = 2\pi$. 讨论函数在一个周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内的图形.

零点: $x = \pm \arccos \frac{1-\sqrt{3}}{2} \approx \pm 0.62\pi,$

$$y' = -\sin x + \sin 2x.$$

令 $y' = 0$. 解得

$$x = 0, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \pi, y'' = -\cos x + 2\cos 2x.$$

令 $y'' = 0$, 解得

$$x_{1,2} = \pm \arccos \frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx 0.18\pi,$$

$$y_{1,2} \approx 0.63,$$

$$x_{3,4} = \pm \arccos \frac{1-\sqrt{33}}{8} \approx 0.70\pi,$$

$$y_{3,4} \approx -0.44.$$

经判别 x_1, x_2, x_3, x_4 均为拐点.

当 $x = 0$ 时, 有极小值 $y = \frac{1}{2}$.

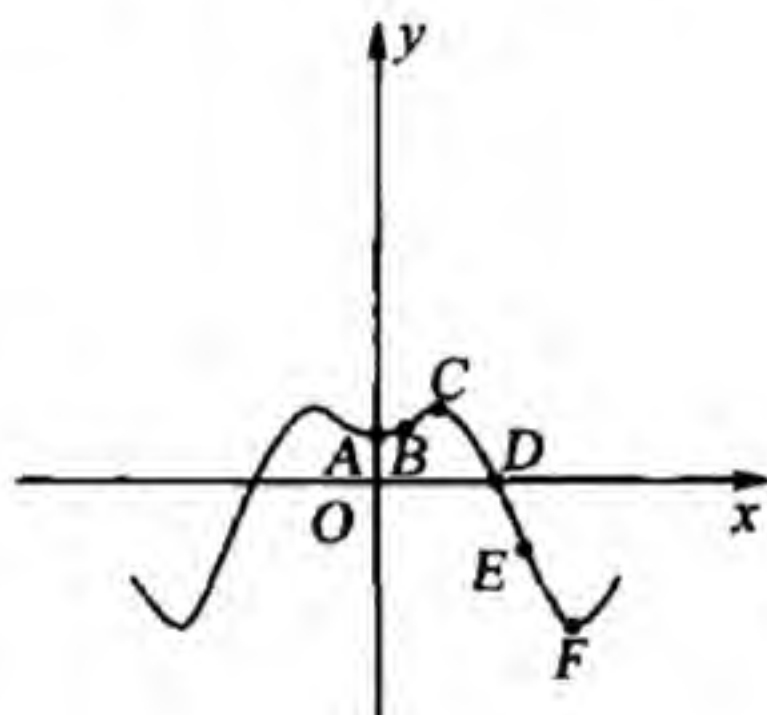
当 $x = \pm\pi$ 时, 有极小值 $y = -\frac{3}{2}$.

当 $x = \pm\frac{\pi}{3}$ 时有极大值 $y = \frac{3}{4}$.

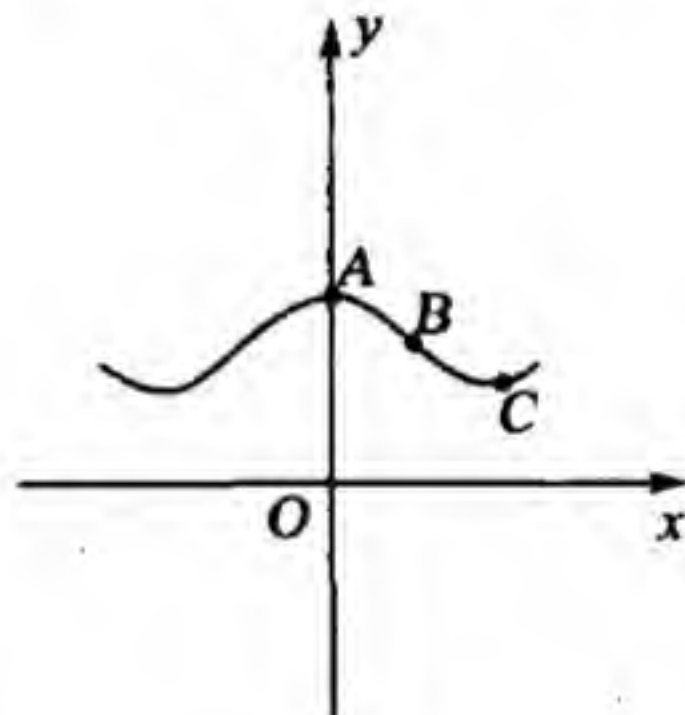
如 1500 题图所示, 图中主要点的坐标:

$$A\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad B(0.18\pi, 0.63), \quad C\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{4}\right),$$

$$D(0.6\pi, 0), \quad E(-0.70\pi, -0.44), \quad F\left(\pi, -\frac{3}{2}\right).$$



1500 题图



1501 题图

【1501】 $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

解 图形关于 Oy 轴对称

由于 $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

$$= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}(3 + \cos 4x),$$

故函数的周期 $T = \frac{\pi}{2}$. 讨论函数在一个周期 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 内的图形.

由 $y' = -\sin 4x$,

令 $y' = 0$ 得 $x = 0, \pm \frac{\pi}{4}$,

$y'' = -4\cos 4x$, 令 $y'' = 0$ 得 $x_{(1)} = \pm \frac{\pi}{8}$.

显然, 点 $x_1 = \frac{\pi}{8}, x_{1.2} = -\frac{\pi}{8}$ 为拐点

当 $x = \pm \frac{\pi}{8}$ 时, $y = \frac{3}{4}$.

当 $x = 0$ 时, 有极大值 $y = 1$.

当 $x = \pm \frac{\pi}{4}$ 时, 有极小值 $y = \frac{1}{2}$.

如 1501 题图所示.

图中主要点的坐标为

$$A(0, 1), B\left(\frac{\pi}{8}, \frac{3}{4}\right), C\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

【1502】 $y = \sin x \cdot \sin 3x$.

解 函数为偶函数, 图形关于 Oy 轴对称

$$\text{由于 } y = \sin x \sin 3x = -\left(\cos 2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{16},$$

故函数的周期 $T = \pi$, 讨论函数在一个周期

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 内的图象

当 $x = 0, \pm \frac{\pi}{3}$ 时, $y = 0$,

$$y' = 2\sin 4x - \sin 2x.$$

令 $y' = 0$ 解得

$$x = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4},$$

$$y'' = 8\cos 4x - 2\cos 2x.$$

令 $y'' = 0$ 解得

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 + \sqrt{129}}{2} \approx \pm 0.11\pi,$$

此时 $y_{1,2} \approx 0.29$,

$$x_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{129}}{2} \approx \pm 0.36\pi,$$

此时 $y_{3,4} \approx -0.24$,

当 $x = 0$ 时, 取极小值 $y = 0$.

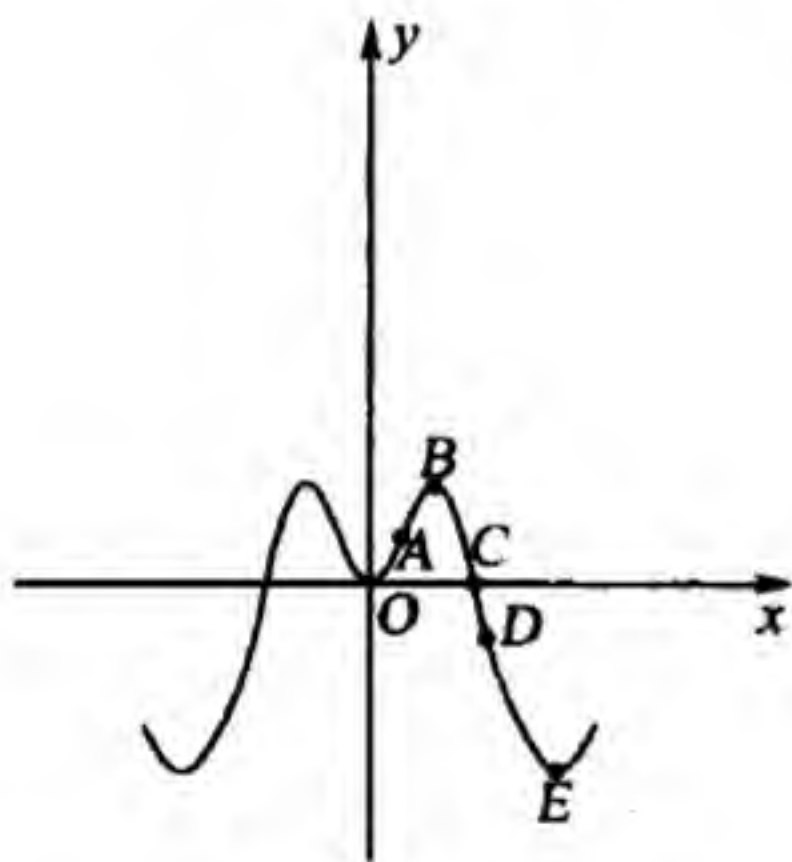
当 $x = \pm \frac{\pi}{2}$ 时, 取极小值 $y = -1$.

当 $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}$ 时, 取极大值 $y = \frac{9}{16}$.

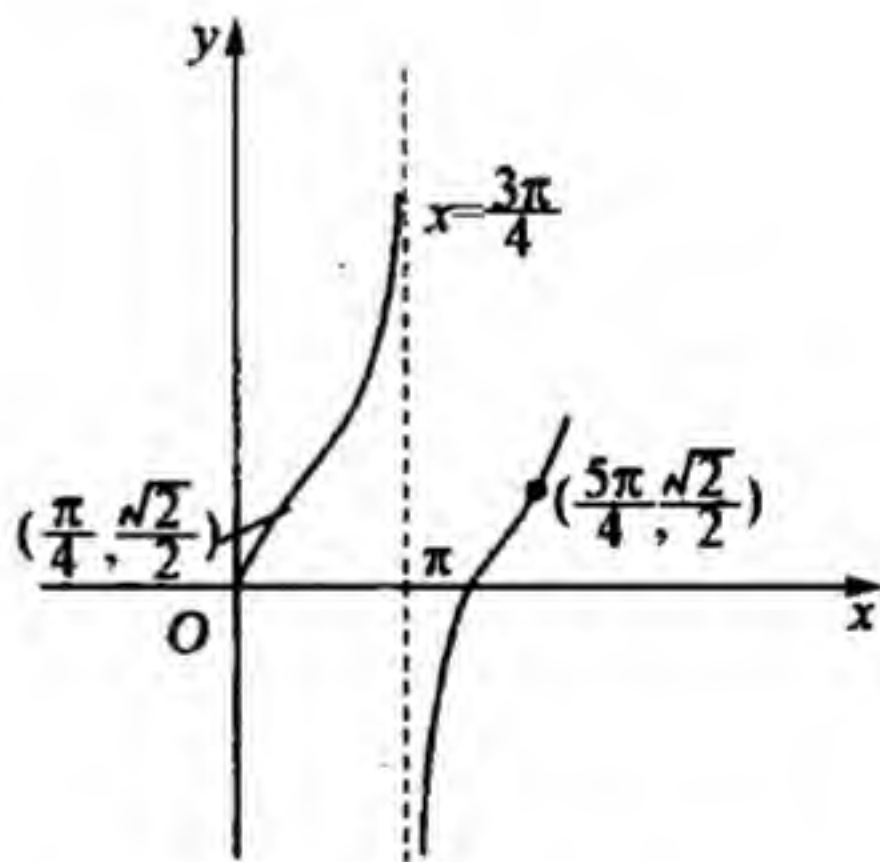
如 1502 题图所示. 图中主要点的坐标

$$A(0.11\pi, 0.29), \quad B(0.21\pi, \frac{9}{16}), \quad C(\frac{\pi}{3}, 0),$$

$$D(0.36\pi, -0.24), \quad E(\frac{\pi}{2}, -1).$$



1502 题图



1503 题图

【1503】 $y = \frac{\sin x}{\sin(x + \frac{\pi}{4})}$.

解 函数的周期为 $T = \pi$, 讨论函数在一个周期 $0 \leq x \leq \pi$ 时的图形.

垂直渐近线 $x = \frac{3\pi}{4}$,

零点: $x = 0, \pi$.

$$y' = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4}\right)} > 0,$$

无极值, 图形上升

$$y'' = -\frac{2\sin \frac{\pi}{4} \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin^3 \left(x + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = \frac{\pi}{4}$, 此时 $y = \frac{\sqrt{-2}}{2}$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 为曲线的拐点. 如 1503 题图.

【1504】 $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}.$

解 图形关于 Oy 轴对称, 函数的周期 $T = 2\pi$, 讨论函数在一个周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内的图形.

零点: $x = \pm \frac{\pi}{2}.$

渐近线: $x = \pm \frac{\pi}{4}, x = \pm \frac{3\pi}{4},$

$$y' = \frac{\sin x (1 + 2\cos^2 x)}{\cos^2 2x}.$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0, \pm \pi,$

$$y'' = \frac{1}{\cos^3 2x} [3\cos x \cos^2 2x + 4\sin 2x \sin x (1 + 2\cos^2 x)].$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm \frac{\pi}{2}$, 此时 $y = 0.$

点 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 为曲线的拐点.

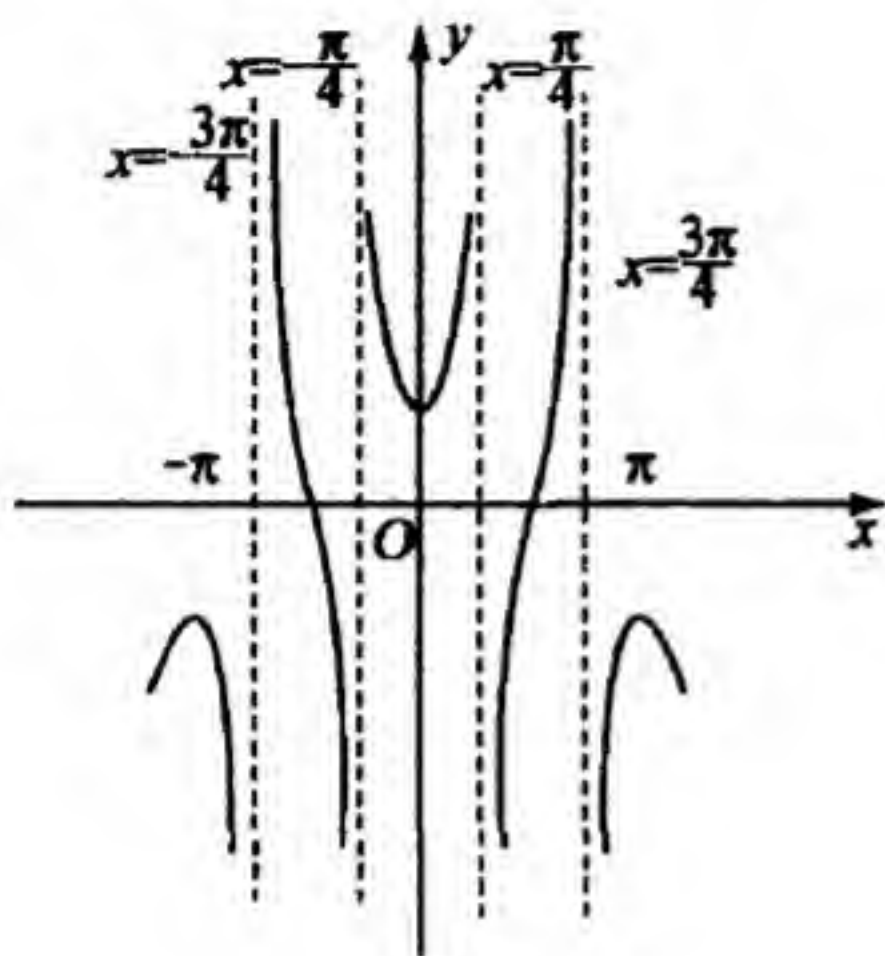
当 $x = 0$ 时, 有极小值 $y = 1.$

当 $x = \pm \pi$ 时, 有极大值 $y = -1.$

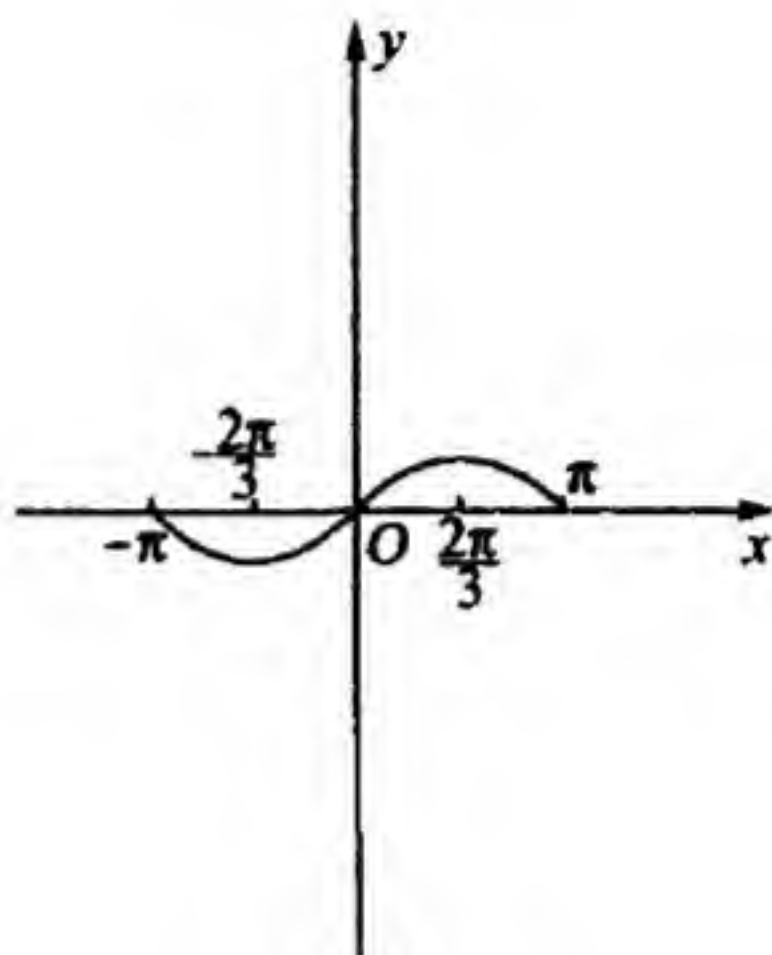
当 $0 < x < \pi$ 时 $y' > 0$, 曲线上升.

当 $-\pi < x < 0$ 时 $y' < 0$, 曲线下降.

如 1504 题图.



1504 题图



1504. 1 题图

【1504. 1】 $y = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$

解 函数为奇函数, 图形关于坐标原点对称, 函数的周期 $T = 2\pi$, 讨论函数在一个周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内的图形

零点: $x = 0, \pm\pi$,

$$y' = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$$

令 $y' = 0$, 解得 $x = \pm \frac{2\pi}{3}$,

$$y'' = \frac{2\sin x(\cos x + 1)}{(2 + \cos x)^3}$$

令 $y'' = 0$ 解得 $x = 0, \pm\pi$.

经判别知 $x = 0, \pm\pi$, 为曲线的拐点, 此时 $y = 0$.

当 $x = \frac{2\pi}{3}$ 时, 取极大值 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

当 $x = -\frac{2\pi}{3}$ 时, 取极小值 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

当 $x = \frac{2\pi}{3}$ 时, $y = -\frac{1}{2}$.

如 1504.1 题图所示.

【1505】 $y = 2x - \tan x$.

解 零点: $x = 0, x \approx 0.37\pi, \dots$

对称中心 $(k\pi, 2k\pi), (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

渐近线:

$$x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$y' = 2 - \sec^2 x.$$

令 $y' = 0$ 得

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4},$$

及 $x = -\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right).$

当 $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ 时, 有极大值,

$$y = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 1.$$

当 $x = -\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ 时, 有极小值,

$$y = -\left(2k\pi + \frac{\pi}{2} - 1\right) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$y'' = -2\sec^2 x \tan x.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

经判别知. 这些都是拐点.

如 1505 题图所示.

【1506】 $y = e^{2x-x^2}$.

解 $y > 0$. 故图形在 Ox 轴上方

$$y = e^{2x-x^2} = e^{-(x-1)^2+1},$$

于是图形关于直线 $x = 1$ 对称. 又

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0,$$

所以 $y = 0$ 为曲线的渐近线

$$y' = (2 - 2x) \cdot e^{2x-x^2}.$$

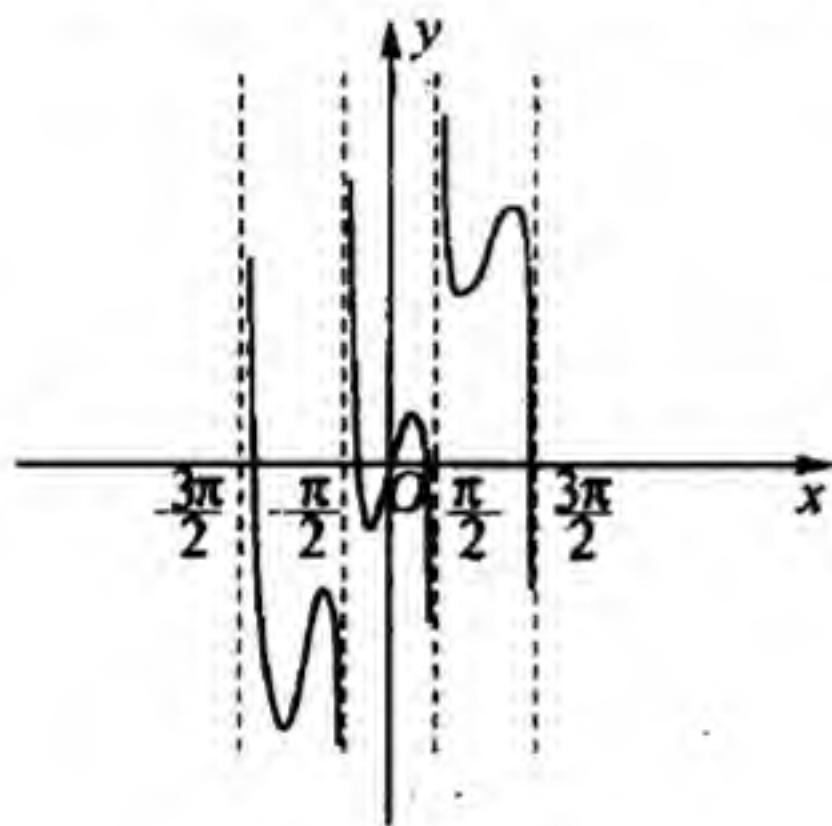
令 $y' = 0$, 得 $x = 1$.

当 $x < 1$ 时, $y' > 0$. 当 $x > 1$ 时, $y' < 0$ 知当 $x = 1$ 时, 有极大值 $y = e$,

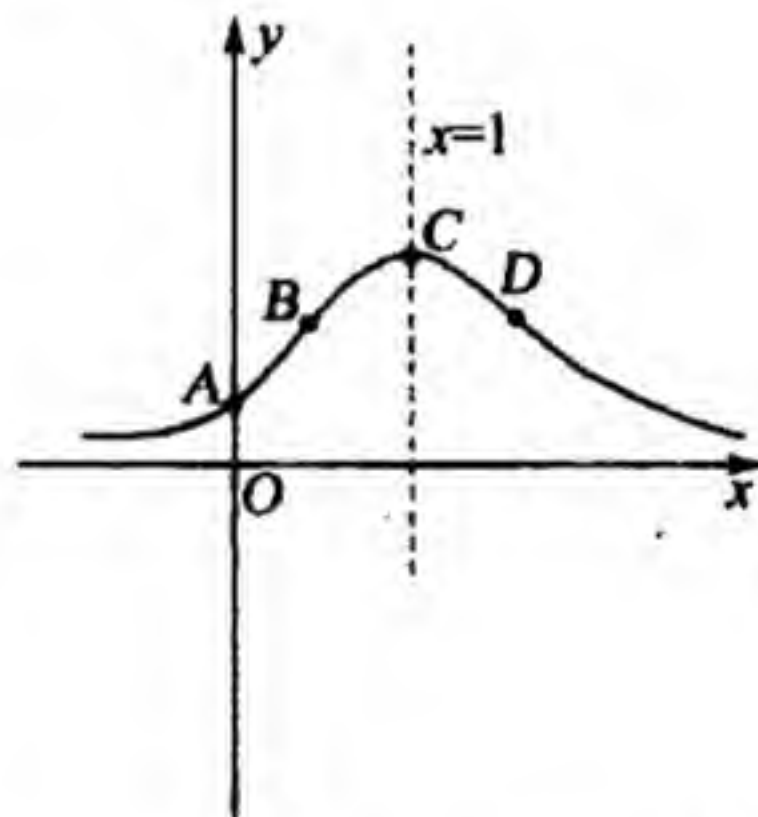
$$y'' = 2(2x^2 - 4x + 1)e^{2x-x^2}.$$

令 $y'' = 0$, 解得 $x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

经判别知它们为拐点, 此时 $y = \sqrt{e} \approx 1.65$



1505 题图



1506 题图

如 1506 题图所示. 图中各点的坐标

$$A(0,1), \quad B\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right), \quad C(1,e), \quad D\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, e\right).$$

【1507】 $y = (1+x^2)e^{-x^2}.$

解 $y > 0$, 曲线在 Ox 轴的上方, 图形关于 Oy 轴对称, $y = 0$ 为曲线的渐近线

$$y' = -2x^3 e^{-x^2},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$,

$$y'' = 2x^2(2x^2 - 3)e^{-x^2}.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$ 及 $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

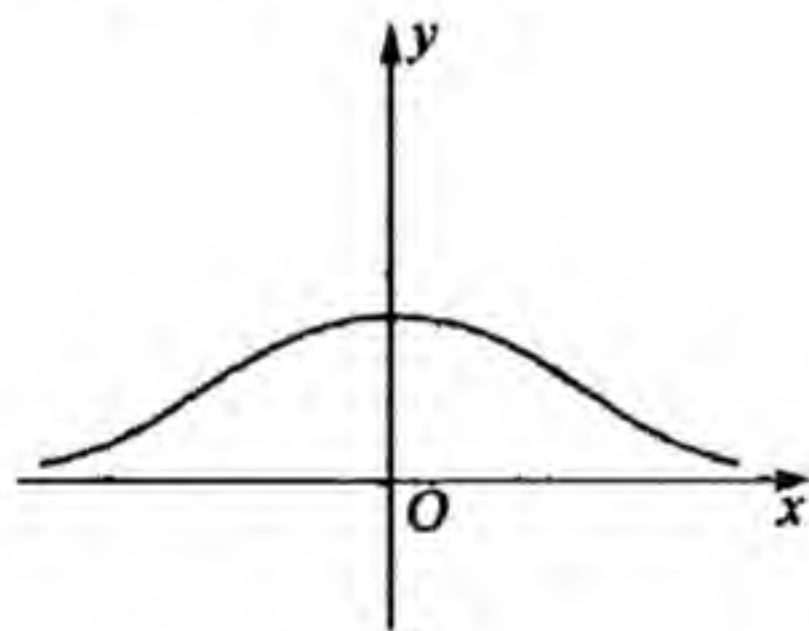
列表

x	$(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$	0	$(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	0	-	0	+
y	$\nearrow \cup$	拐点	$\nearrow \cup$	极大值	$\searrow \cup$	拐点	$\searrow \cup$

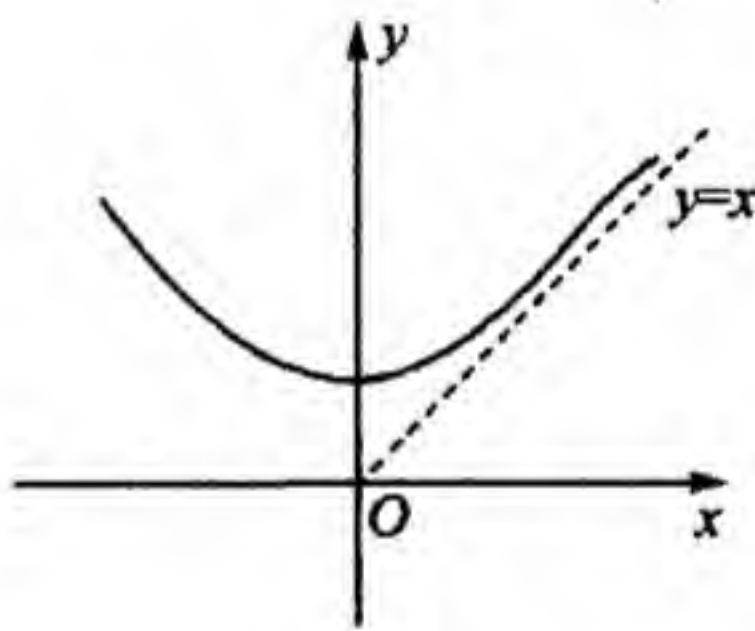
当 $x = 0$ 时, $y = 1$. 当 $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1.22$ 时, $y = \frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}} \approx$

0.56.

如 1507 题图所示.



1507 题图



1508 题图

【1508】 $y = x + e^{-x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = 0,$

所以 $y = x$ 为曲线的斜渐近线, 又

$$y' = 1 - e^{-x}.$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$, 此时有极小值 $y = 1$,

$$y'' = e^{-x} > 0.$$

故曲线是凹的.

如 1508 题图所示.

【1509】 $y = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$.

解 零点: $x = 0$, 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{2}{3}} e^{-x} = 0,$$

所以 $y = 0$ 为曲线的渐近线

$$y' = -x^{-\frac{1}{3}} e^{-x} \left(x - \frac{2}{3} \right).$$

令 $y' = 0$, 得 $x = \frac{2}{3}$.

当 $x = 0$ 时, $y' = \infty$,

易知, 当 $x = 0$ 时, 有极小值 $y = 0$, 且 $(0, 0)$ 为尖点.

当 $x = \frac{2}{3}$ 时, 有极大值 $y = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} e^{-\frac{2}{3}} \approx 0.39$,

$$y'' = \frac{1}{9} e^{-x} x^{-\frac{4}{3}} (9x^2 - 12x - 2).$$

令 $y'' = 0$ 得

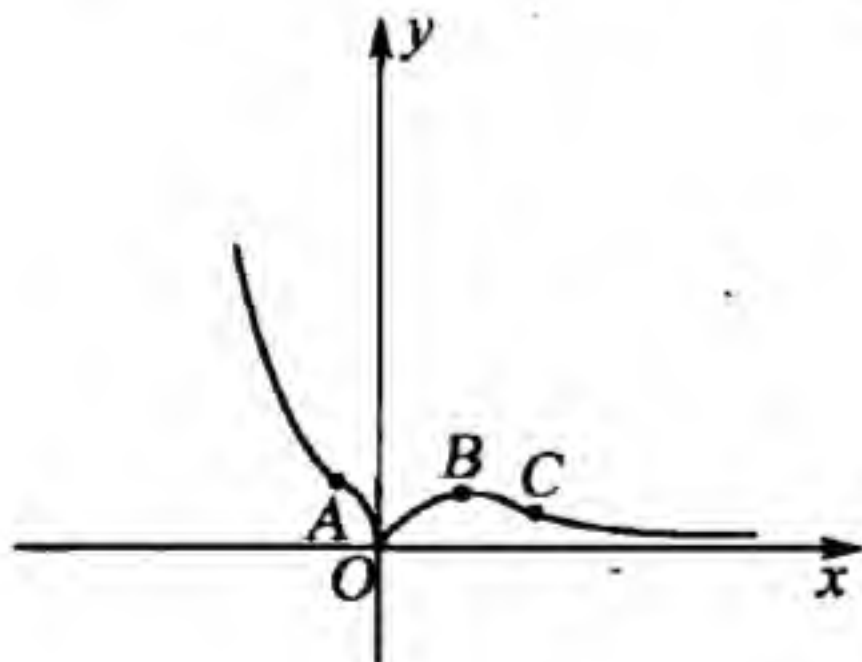
$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{6}}{3} \approx -0.15, y \approx 0.34,$$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{6}}{3} \approx 1.48, y \approx 0.30.$$

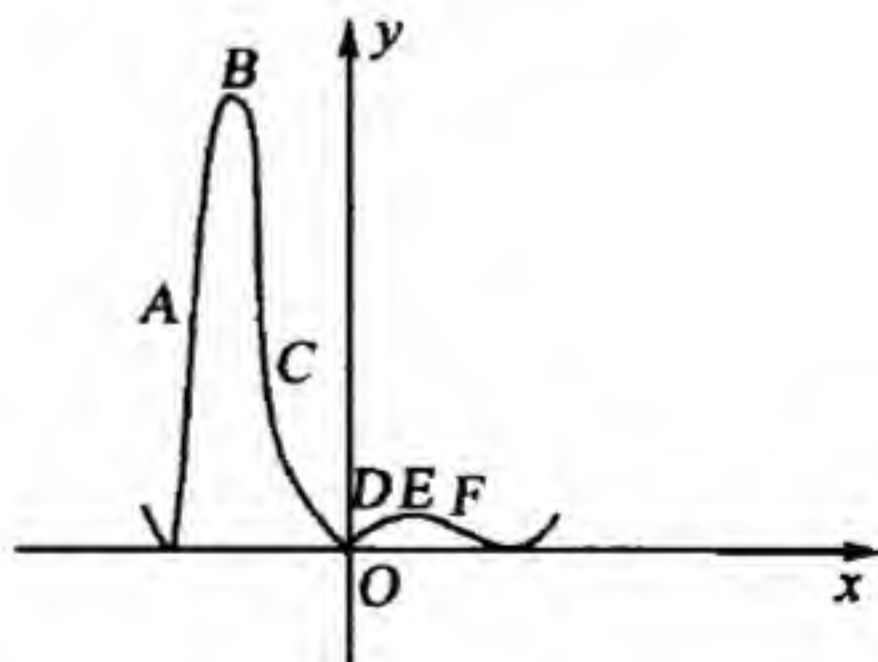
易知点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 均为拐点.

如 1509 题图所示, 图中主要点的坐标.

$A(-0.15, 0.34), B(\frac{2}{3}, 0.39), C(1.48, 0.30).$



1509 题图



1509.1 题图

【1509.1】 $y = e^{-2x} \sin^2 x.$

解 零点:

$$x = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$y' = 2\sin x(\cos x - \sin x)e^{-2x}.$$

令 $y' = 0$, 解得

$$x = k\pi,$$

及 $x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$

$$y'' = 2(1 - 2\sin 2x)e^{-2x}.$$

令 $y'' = 0$, 解得

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

及 $x = k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

经判别知这些都是拐点

又 $y''|_{x=k\pi} > 0$, 所以当 $x = k\pi$ 时, 取极小值 $y = 0$,

$y''|_{x=k\pi+\frac{\pi}{4}} < 0$, 所以当 $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ 时, 取极大值

$$y = \frac{1}{2}e^{-(2k\pi+\frac{\pi}{2})},$$

如 1509.1 所示(仅描绘了 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内的图形).

【1510】 $y = \frac{e^x}{1+x}.$

解 当 $x < -1$ 时, $y < 0$,

当 $x > -1$ 时, $y > 0$,

不连续点 $x = -1$, 垂直渐近线: $x = -1$,

又 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$. 所以 $y = 0$ 为曲线的水平渐近线

$$y' = \frac{xe^x}{(1+x)^2}.$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$, 易知

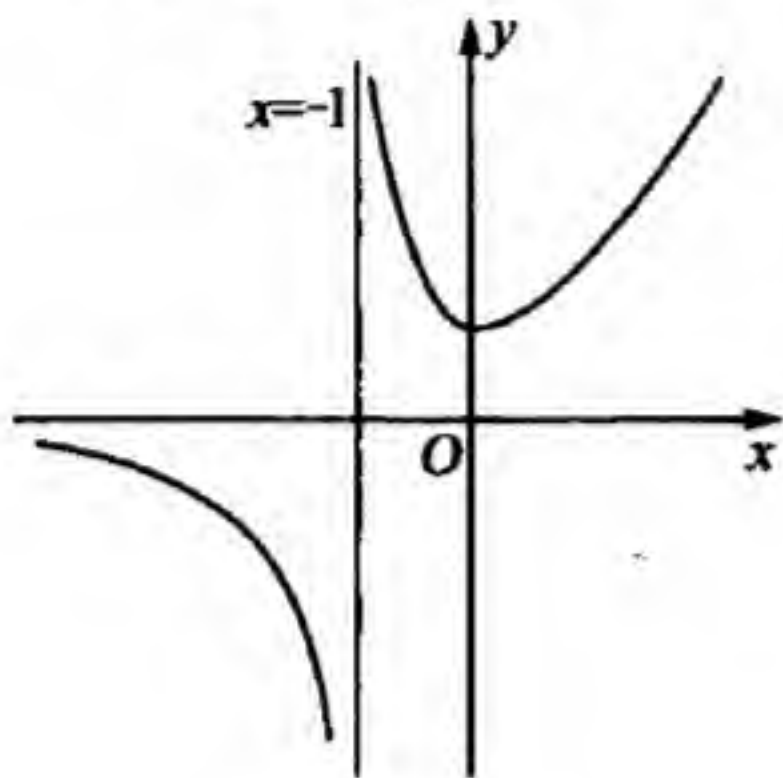
当 $x = 0$ 时, 有极小值 $y = 1$,

$$y'' = \frac{e^x(x^2 + 1)}{(1+x)^3}.$$

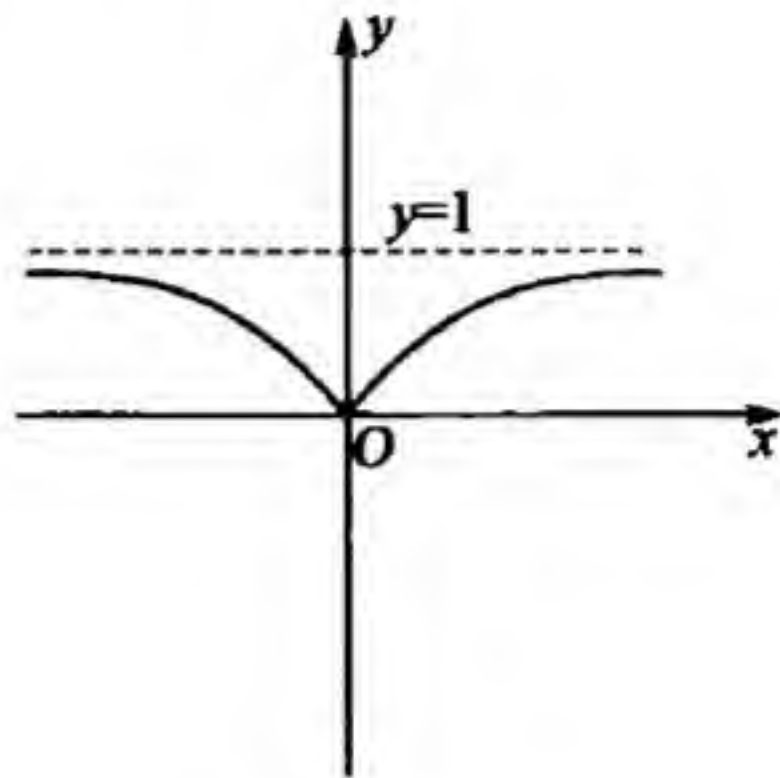
当 $x < -1$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的.

当 $x > -1$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的.

如 1510 题图所示



1510 题图



1511 题图

【1511】 $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

解 图形关于 Oy 轴对称

零点: $x = 0$ 且 $y \geq 0$. 图形在 Ox 轴的上方, 又

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1,$$

所以 $y = 1$ 为曲线的水平渐近线

$$y' = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

当 $x < 0$ 时, $y' < 0$, 曲线下降.

当 $x > 0$ 时, $y' > 0$, 曲线上升.

所以当 $x = 0$ 时, 有极小值 $y = 0$, 又 $y''|_{x=0} = \infty$. 故 $(0, 0)$ 为尖点

$$y'' = e^{-x^2} \frac{1 - 3x^2 - e^{-x^2} + 2x^2 e^{-x^2}}{(1 - e^{-x^2}) \sqrt{1 - e^{-x^2}}} < 0 \quad (x \neq 0),$$

故图形呈凸状.

如 1511 题图所示.

【1512】 $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

解 存在域: $x > 0$.

当 $x = 1$ 时, $y = 0$.

$$\text{又} \quad \lim_{x \rightarrow +0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0,$$

故 $x=0, y=0$ 为曲线的渐近线

$$y' = \frac{2 - \ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}.$$

令 $y' = 0$, 得 $x = e^2 \approx 7.4$,

易知当 $x = e^2$ 时有极大值

$$y = \frac{2}{e} \approx 0.74, y'' = \frac{3\ln x - 8}{4x^{\frac{5}{2}}}.$$

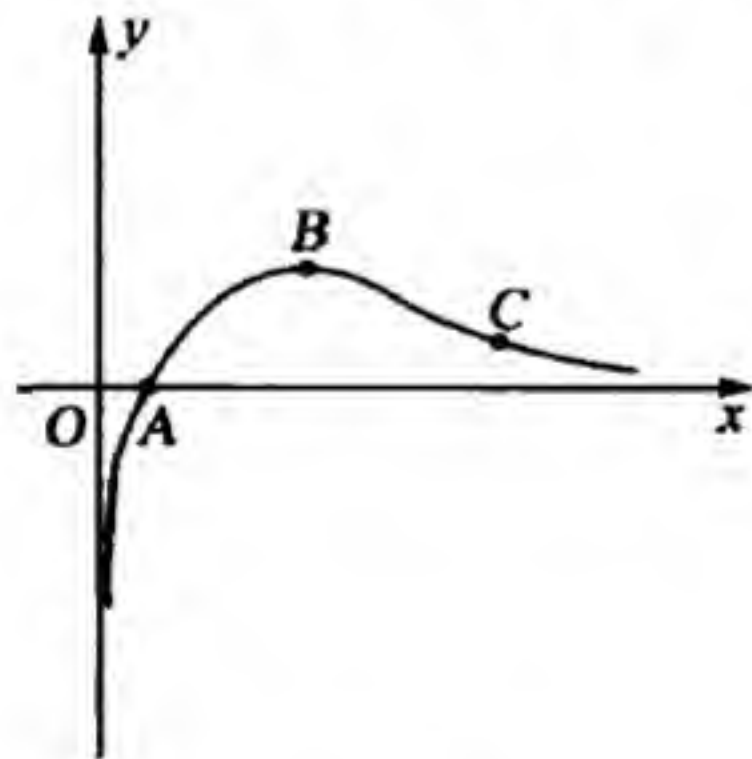
令 $y'' = 0$ 得 $x = e^{\frac{8}{3}} \approx 14.39$,

此时 $y = \frac{8}{3}e^{-\frac{1}{3}} \approx 0.70$,

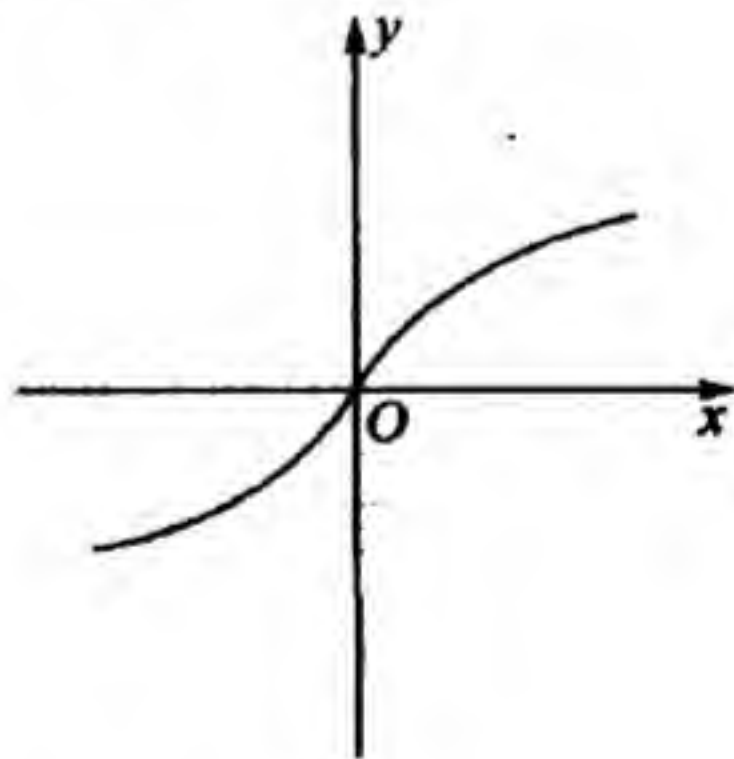
显然这是拐点

如 1512 题图所示, 图中主要点的坐标

$A(1,0), B(7.40, 0.74), C(14.33, 0.70)$.



1512 题图



1513 题图

【1513】 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

解 函数为奇函数, 图形关于坐标原点对称

当 $x=0$ 时 $y=0$,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0,$$

故函数单调增加, 无极值

$$y'' = \frac{-x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = 0$, 此时 $y = 0$,

显然点 $(0, 0)$ 为曲线的拐点, 当 $x > 0$ 时, $y'' < 0$,

图形为凸的; 当 $x < 0$ 时, $y'' > 0$, 图形为凹的.

如 1513 题图所示.

【1514】 $y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

解 图形关于坐标原点对称

零点: $x = 0$,

$$y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

$$y'' = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + x \sqrt{x^2 + 1}}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}},$$

当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$, 图形为凹的,

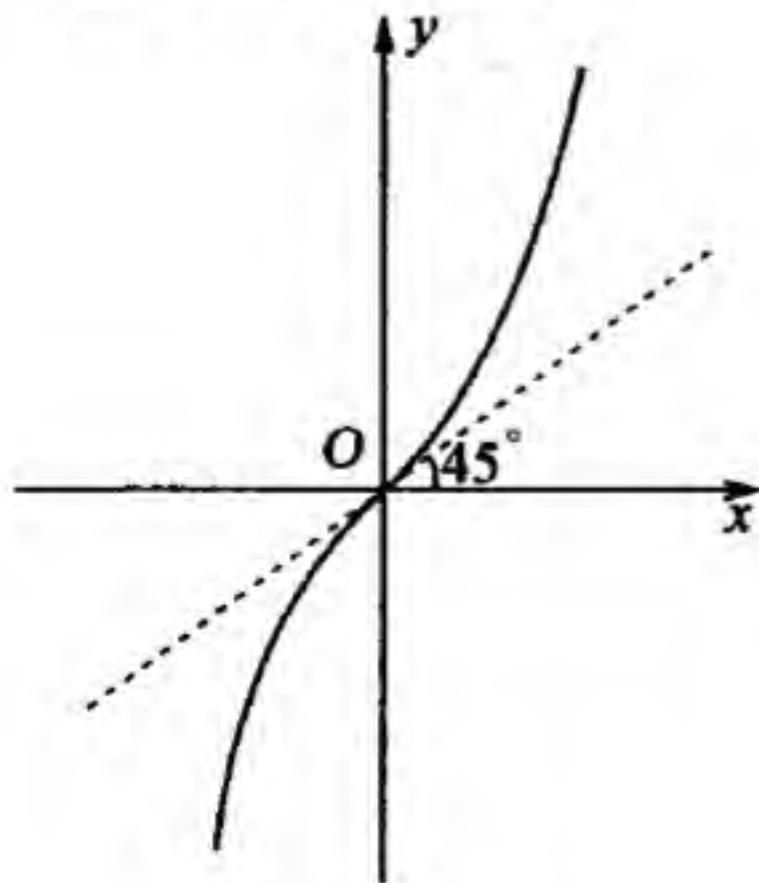
当 $x < 0$ 时, $y'' < 0$, 图形为凸的,

点 $(0, 0)$ 为拐点.

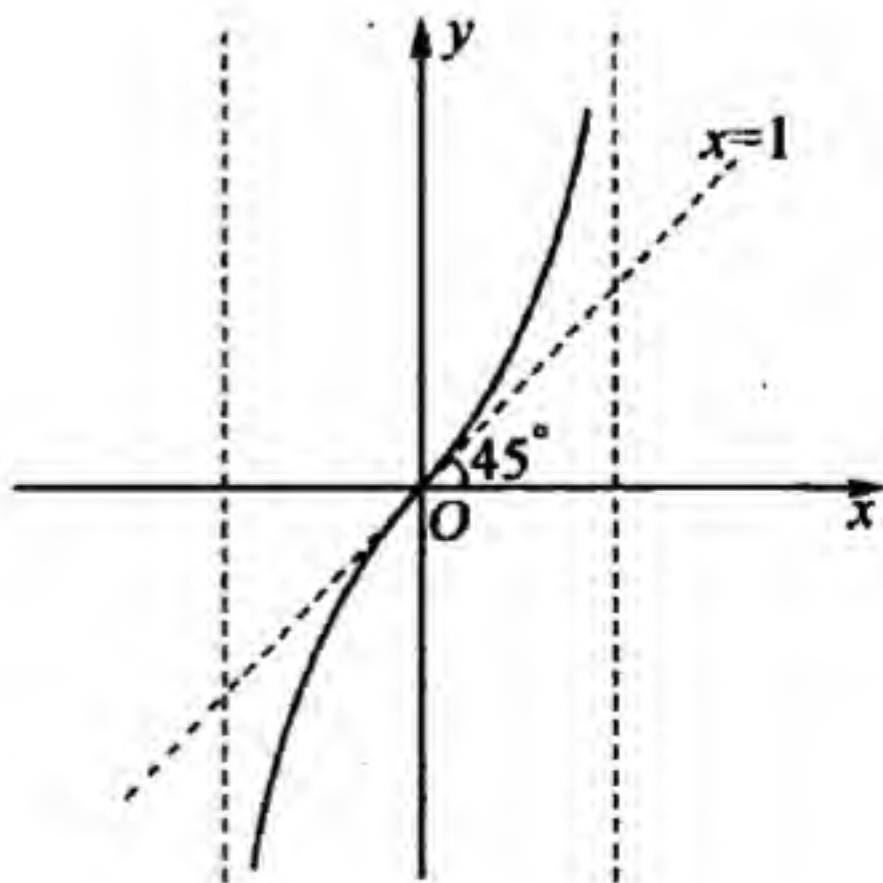
因此 $y'(x) \geq y'|_{x=0} = 1 > 0$,

从而函数是单调增加的.

如 1514 题图所示



1514 题图



1515 题图

【1515】 $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

解 存在域: $|x| < 1$,

图形关于坐标原点对称, 零点: $x = 0$,

渐近线 $x = \pm 1$,

$$y' = \frac{\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0 \quad (|x| < 1),$$

故函数严格单调增加.

$$y'' = \frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$.

当 $-1 < x < 0$, $y'' < 0$. 故图形是凸的.

当 $0 < x < 1$, $y'' > 0$. 故图形是凹的.

点 $(0, 0)$ 为拐点, 在此点切线的斜率 $k = 1$.

如 1515 题图所示.

【1516】 $y = x + \arctan x$.

解 图形关于坐标原点对称

当 $x = 0$ 时 $y = 0$,

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (y - x) = -\frac{\pi}{2},$$

故 $y = x + \frac{\pi}{2}$ 及 $y = x - \frac{\pi}{2}$ 为曲线的渐近线

$$y' = 1 + \frac{1}{1+x^2} > 0.$$

故图形始终上升, 无极值点

$$y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

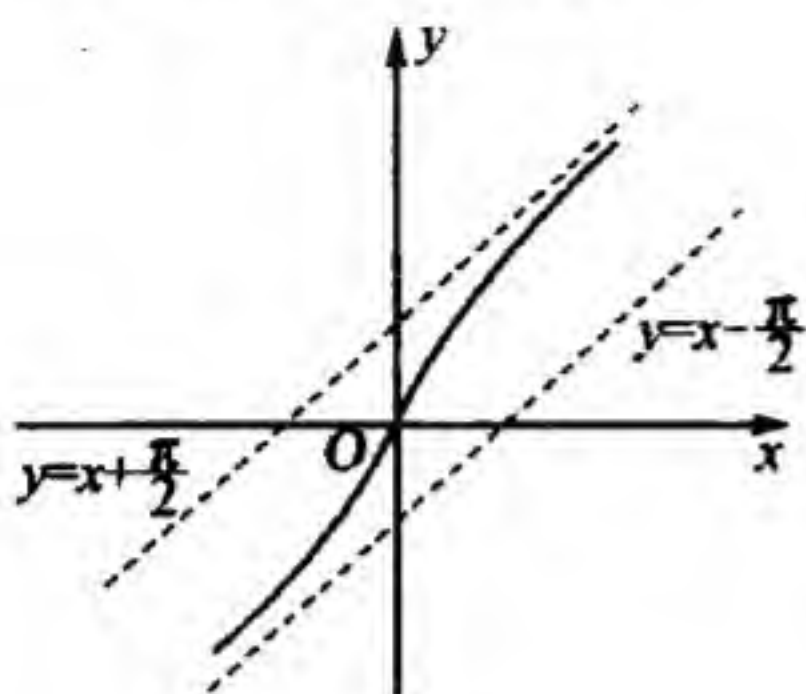
令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$.

当 $x < 0$ 时, $y'' > 0$ 图形为凹的;

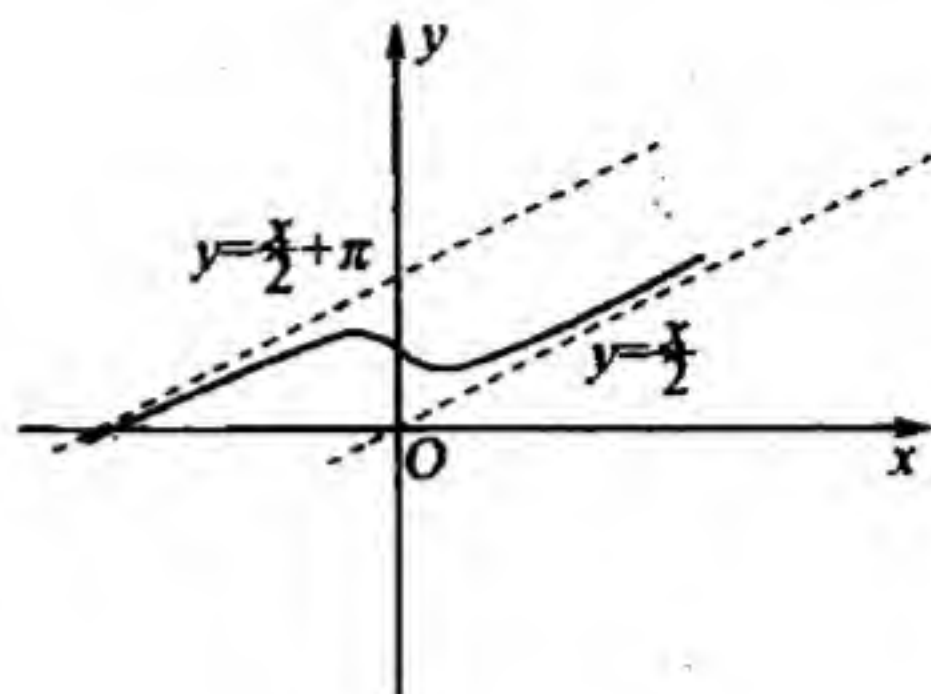
当 $x > 0$ 时, $y'' < 0$ 图形为凸的;

$(0, 0)$ 为拐点.

如 1516 题图所示.



1516 题图



1517 题图

【1517】 $y = \frac{x}{2} + \operatorname{arccot} x$.

解 零点 $x \approx -5.95$, 而

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2} + \operatorname{arccot} x}{x} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(y - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(y - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0,$$

所以 $y = \frac{1}{2}x$ 及 $y = \frac{1}{2}x + \pi$ 为曲线的渐近线

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^2},$$

令 $y' = 0$, 得 $x = \pm 1$.

当 $x < -1$ 及 $x > 1$ 时, $y' > 0$, 曲线上升.

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' < 0$, 曲线下降.

故当 $x = 1$ 时, 有极小值 $y = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \approx 1.285$.

当 $x = -1$ 时, 有极大值 $y = -\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} \approx 1.856$,

$$y'' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = 0$.

当 $x < 0$ 时, $y'' < 0$, 故曲线是凸的.

当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$, 故曲线是凹的, 从而 $x = 0$ 为拐点
此时 $y = \frac{\pi}{2}$. 如 1517 题图所示.

【1518】 $y = x \arctan x$.

解 图形关于 Oy 轴对称, 且 $y \geq 0$, 图形在 Ox 轴的上方, 零点: $x = 0$

而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(y - \frac{\pi}{2} x \right) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(y + \frac{\pi}{2} x \right) = -1,$$

所以 $y = \frac{\pi}{2}x - 1, y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ 为曲线的渐近线.

$$y' = \frac{x}{1+x^2} + \arctan x.$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$.

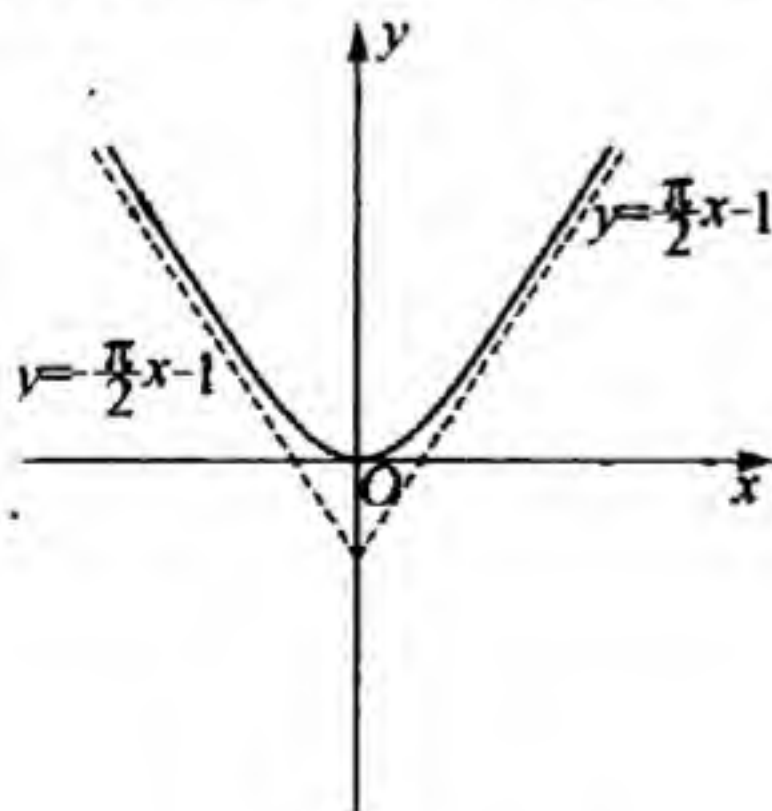
当 $x < 0$ 时, $y' < 0$, 图形下降.

当 $x > 0$ 时, $y' > 0$, 图形上升.

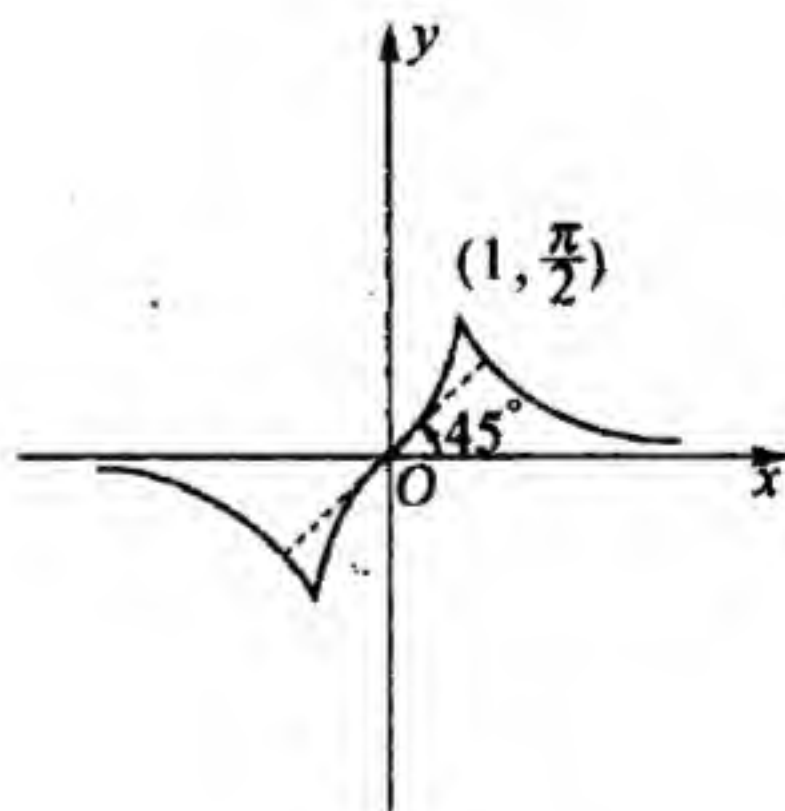
故当 $x = 0$ 时, 有极小值 $y = 0$,

$$y'' = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0,$$

故图形是凹的, 如 1518 题图.



1518 题图



1519 题图

【1519】 $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

解 图形关于坐标原点对称.

当 $x = 0$ 时, $y = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0,$$

所以, $y = 0$ 为曲线的渐近线.

$$y' = \frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2} \quad (|x| \neq 1).$$

当 $|x| < 1$ 时, $y' > 0$, 图形上升.

当 $|x| > 1$ 时, $y' < 0$, 图形下降.

当 $x = 1$ 时, 由定义可得

$$y'_-(1) = 1, y'_+(1) = -1,$$

故点 $(1, \frac{\pi}{2})$ 为角点, 且当 $x = 1$ 时, 有最大值 $y = \frac{\pi}{2}$, 由对称性知

点 $(-1, -\frac{\pi}{2})$ 也为角点, 并且当 $x = -1$ 时, 有最小值 $y = -\frac{\pi}{2}$.

$$y'_-(-1) = -1, y'_+(-1) = 1,$$

$$y'' = \frac{-4x\operatorname{sgn}(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = 0$, 容易验证 $x = 0$ 为拐点.

当 $x = 0$ 时, $y'|_{x=0} = 1$, 如 1519 题图所示.

【1520】 $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

零点: $x = 0$,

又 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \pi$, 所以 $y = \pi$ 为曲线的渐近线

$$y' = \frac{2\operatorname{sgn}x}{1+x^2} \quad (x \neq 0).$$

当 $x > 0$ 时 $y' > 0$, 曲线上升.

当 $x < 0$ 时 $y' < 0$, 曲线下降.

由定义直接计算得 $y'_+(0) = 2, y'_-(0) = -2$,

故 $(0,0)$ 为角点, 且当 $x=0$ 时, 有最小值 $y=0$,

$$y'' = -\frac{4x \operatorname{sgn} x}{(1+x^2)^2} < 0,$$

图形为凸的. 如 1520 题图所示.

【1521】 $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

解 零点 $x=-2$, 不连续点 $x=0$,

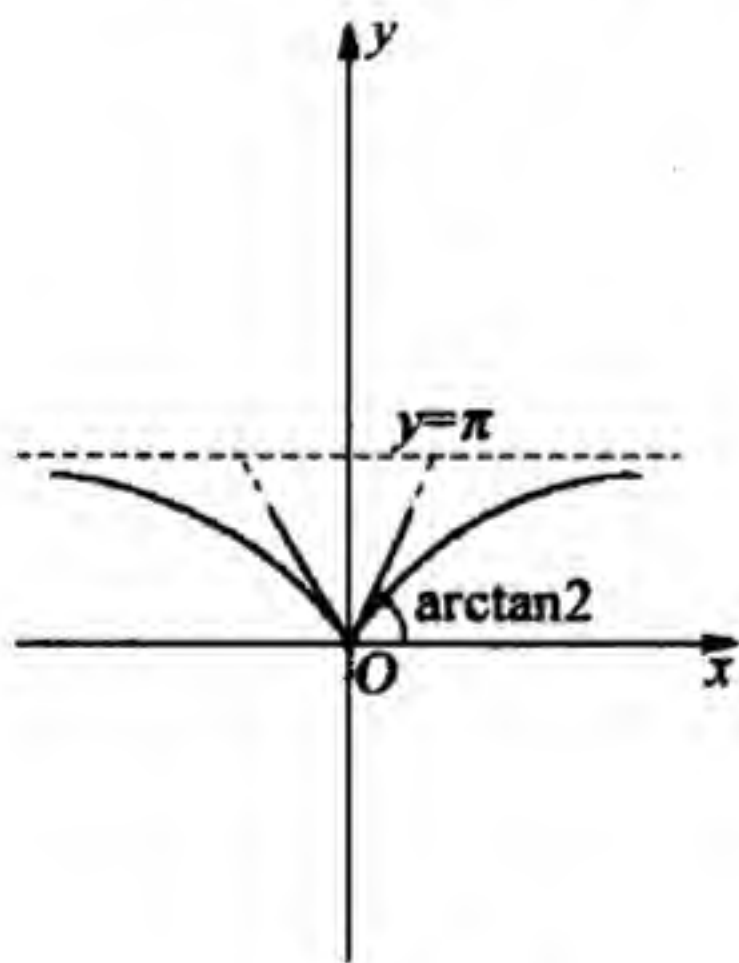
而 $\lim_{x \rightarrow +0} y = +\infty$, $x=0$ 为垂直渐近线, $\lim_{x \rightarrow -0} y = 0$,

又 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1,$

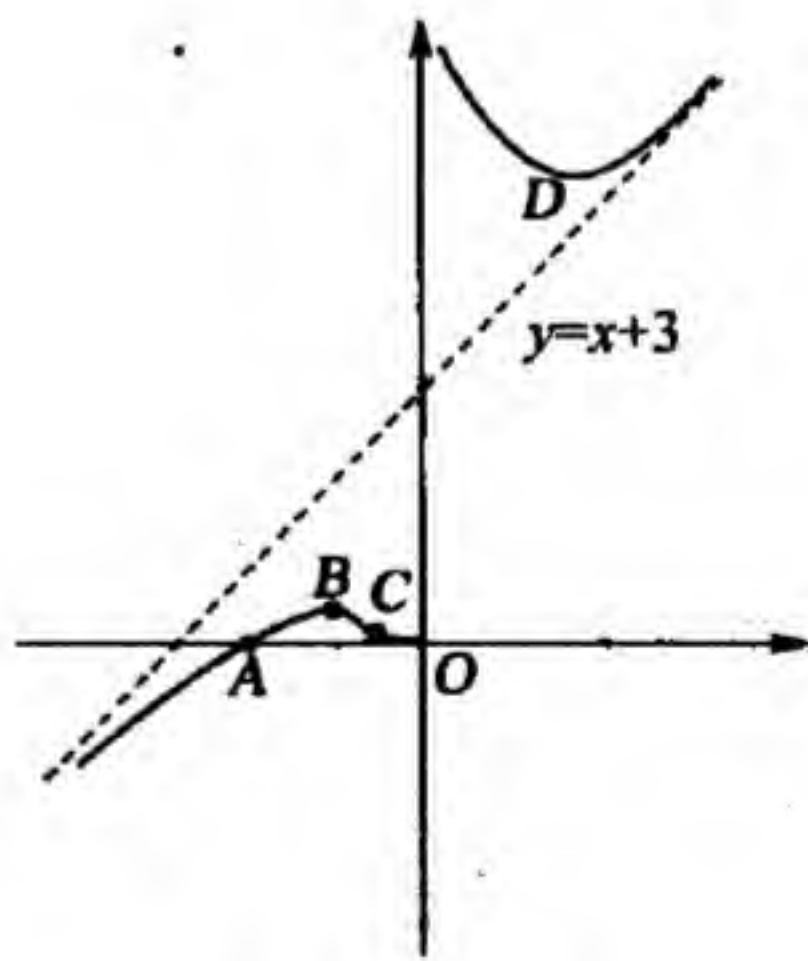
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (y-x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2)e^{\frac{1}{x}} - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[3 + x + o\left(\frac{1}{x}\right) - x \right] = 3, \end{aligned}$$

故 $y = x-3$ 为渐近线.

$$y' = e^{\frac{1}{x}} \frac{x^2 - x - 2}{x^2}.$$



1520 题图



1521 题图

令 $y' = 0$, 得 $x=-1$ 及 $x=2$.

当 $0 < x < 2$ 时, $y' < 0$, 图形下降.

当 $x > 2$ 时, $y' > 0$, 图形上升.

故当 $x=2$ 时, 有极小值

$$y = 4e^{\frac{1}{2}} \approx 6.59.$$

当 $-\infty < x < -1$ 时, $y' > 0$, 图形上升.

当 $-1 < x < 0$ 时, $y' < 0$, 图形下降.

故当 $x = -1$ 时, 有极大值.

$$y = e^{-1} \approx 0.37,$$

$$y'' = e^{\frac{1}{x}} \frac{5x+2}{x^4}.$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = -\frac{2}{5}$.

当 $x < -\frac{2}{5}$ 时, $y'' < 0$, 图形是凸的.

当 $x > -\frac{2}{5}$ 时, $y'' > 0$, 图形是凹的.

故 $x = -\frac{2}{5}$ 为拐点, 此时

$$y = \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}} \approx 0.13.$$

如 1521 题图所示, 图中主要点的坐标 $A(-2, 0)$, $B(-1, 0.37)$, $C(-0.40, 0.13)$, $D(2, 6.59)$.

【1522】 $y = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}.$

解 存在域 $|x| \geq 1$, 图形关于 Oy 轴对称, 又

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} 2^{\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}} = 1,$$

故 $y = 1$ 为渐近线.

当 $x = \pm 1$ 时, 有边界的极大值 $2^{\sqrt{2}} \approx 2.67$,

$$y'_+(1) = -\infty,$$

$$y'_-(-1) = +\infty,$$

$$y' = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right).$$

当 $x < -1$ 时, $y' > 0$, 曲线上升.

当 $x > 1$ 时, $y' < 0$, 曲线下降.

$$y'' = (\ln 2)^2 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right)^2$$

$$+(\ln 2) \cdot 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \right) > 0,$$

故曲线始终是凹的.

【1523*】 $y = \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}.$

解 存在域 $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty),$

而 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = 0,$

所以 $y = 0$ 为渐近线, $x = 1$, 及 $x = 2$ 为垂直渐近线

$$y' = \frac{3x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}.$$

令 $y' = 0$ 得

$$x = \frac{1 - \sqrt{10}}{3} \approx -0.72.$$

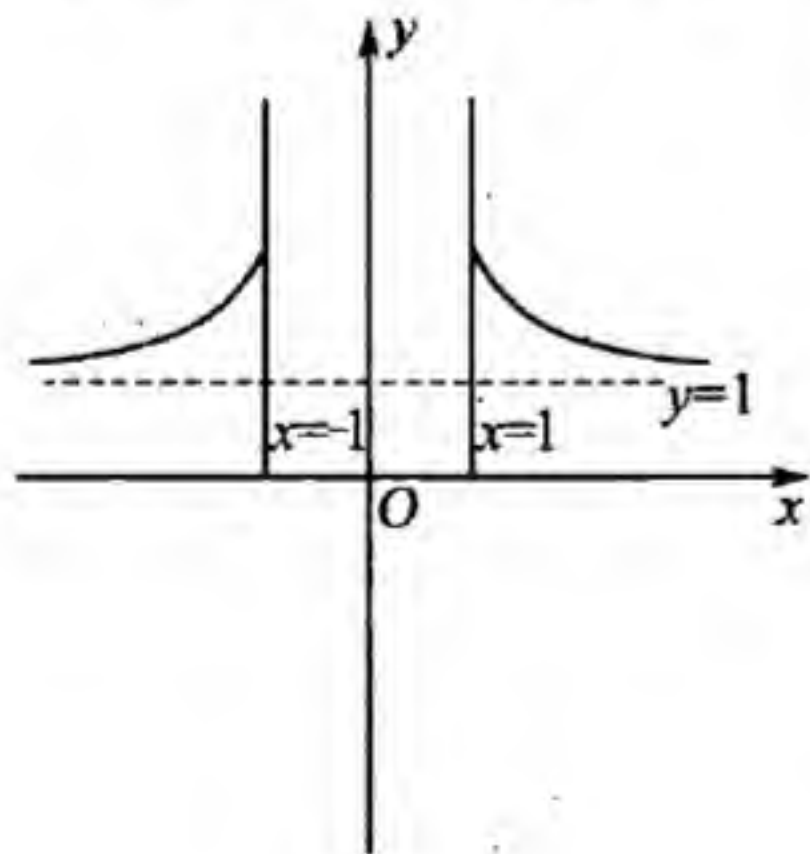
易证, 当 $x \approx -0.72$ 时有极大值 $y \approx 1.12,$

$$y'' = \frac{-6x^5 + 15x^4 - 30x^2 + 30x - 13}{(x-1)^2(x-2)^2(x^2+1)^2}$$

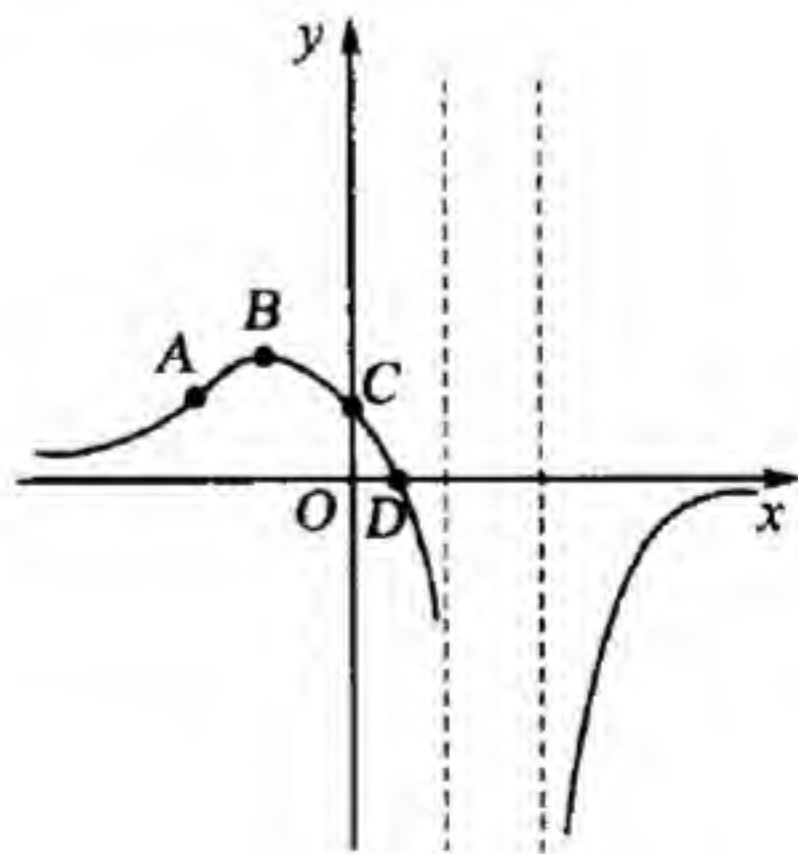
令 $y'' = 0$, 得 $x \approx -1.49$, 判别其为拐点, 此时 $y \approx \ln 2.7.$

当 $x < -1.49$ 时, $y'' > 0$, 图形是凹的.

当 $x > -1.49$ 时, $y'' < 0$, 图形是凸的.



1522 题图



1523 题图

如 1523 题图所示, 图中主要点的坐标 $A(-1.49, \ln 2.7),$

$$B(-0.72, 1.12), C(0, \ln 2), D\left(\frac{1}{3}, 0\right).$$

【1524】 $y = a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0).$

解 存在域 $|x| \leq a$,

$$y' = \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}} > 0 \quad (|x| < a),$$

故图形单调上升, 又

$$y'_-(a) = +\infty, y'_+(-a) = 0,$$

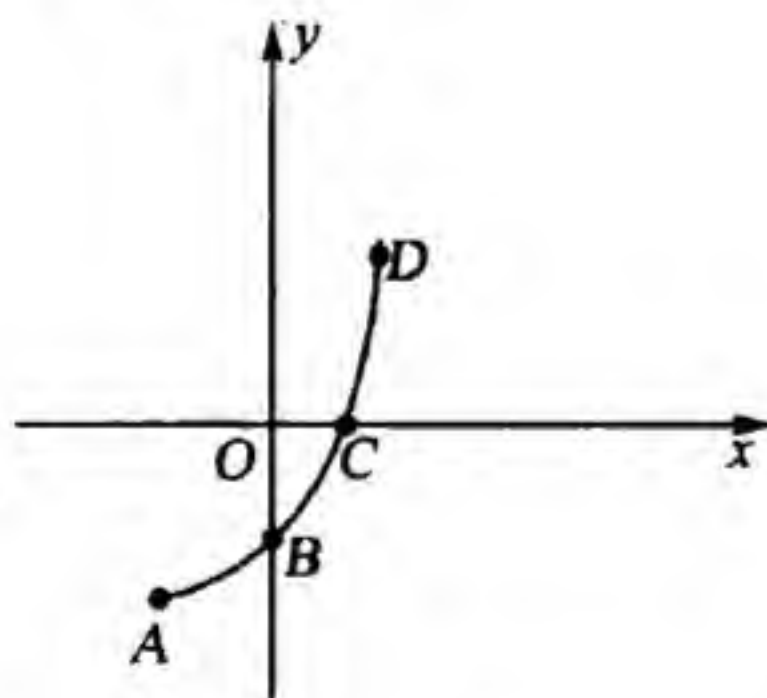
$$y'' = \frac{a(a+x)}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

故图形是凹的.

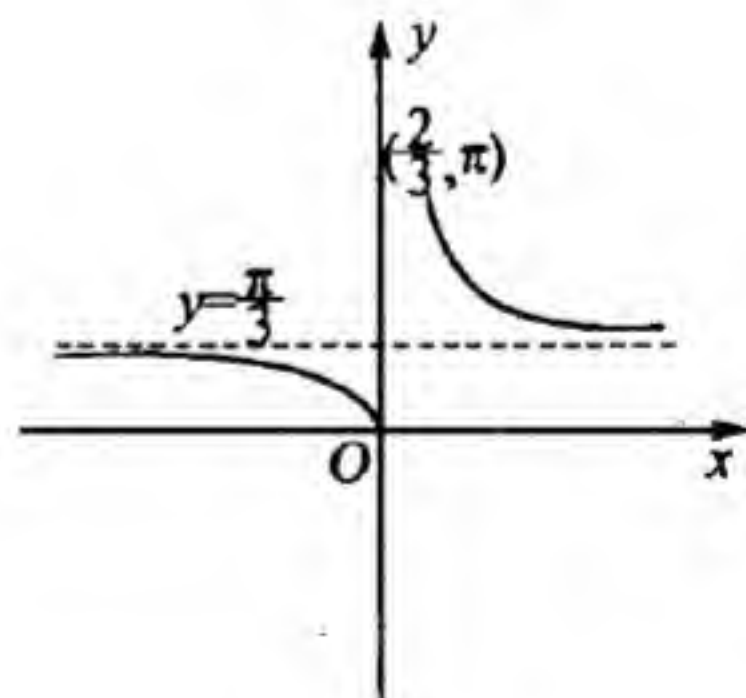
当 $x = 0$ 时, $y = -a$, 当 $x = -a$ 时, $y = -\frac{\pi}{2}a$.

当 $x = a$ 时, $y = \frac{\pi}{2}a$, 当 $y = 0$ 时, $x \approx 0.67a$.

如 1524 题图所示, $A(-a, -\frac{\pi}{2}a)$, $B(0, -a)$, $C(0.67a, 0)$, $D(a, \frac{\pi}{2}a)$.



1524 题图



1525 题图

【1525】 $y = \arccos \frac{1-x}{1-2x}.$

解 存在域 $(-\infty, 0] \cup [\frac{2}{3}, +\infty)$,

而 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arccos \frac{1-x}{1-2x} = \frac{\pi}{3}$,

所以 $y = \frac{\pi}{3}$ 为曲线的渐近线.

当 $x = 0$ 时, 有边界极小值 $y = 0$.

当 $x = \frac{2}{3}$ 时, 有边界极大值 $y = \pi$.

$$y' = -\frac{\operatorname{sgn}(1-2x)}{(1-2x)\sqrt{3x^2-2x}},$$

$$y'' = \begin{cases} \frac{9x-12x^2-1}{(3x^2-2x)^{\frac{3}{2}}(1-2x)^2} & \text{当 } x \leq 0 \text{ 时,} \\ \frac{12x^2-9x+1}{(3x^2-2x)^{\frac{3}{2}}(1-2x)^2} & \text{当 } x \geq \frac{2}{3} \text{ 时,} \end{cases}$$

当 $x \in (-\infty, 0] \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$ 时, $y' < 0$, 图形下降.

当 $x \leq 0$ 时, $y'' < 0$, 图形是凸的.

当 $x \geq \frac{2}{3}$ 时, $y'' > 0$, 图形是凹的.

$$y'_-(0) = -\infty, y'_+(\frac{2}{3}) = -\infty.$$

如 1525 题图所示.

【1526】 $y = x^x$.

解 只讨论 $x > 0$ 的情况, 此时 $y > 0$. 故图形在 Ox 轴上方.

$$y' = x^x(1 + \ln x).$$

令 $y' = 0$, 得 $x = \frac{1}{e}$.

当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $y' < 0$, 图形下降.

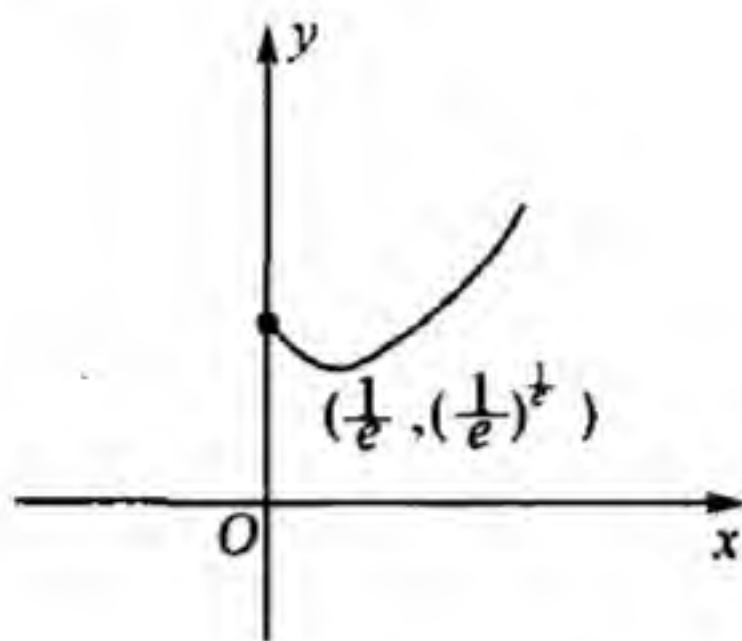
当 $\frac{1}{e} < x < +\infty$ 时, $y' > 0$, 图形上升.

所以, 当 $x = \frac{1}{e}$ 时, 有最小值 $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \approx 0.69$,

$$y'' = x^x \left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right] > 0,$$

图形是凹的. 又 $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1$.

如 1526 题图所示.



1526 题图

【1527*】 $y = x^{\frac{1}{x}}$.

解 只讨论 $x > 0$ 的情况.

因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$, 所以 $y = 1$ 为曲线的渐近线.

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x).$$

令 $y' = 0$, 得 $x = e$.

当 $0 < x < e$ 时, $y' > 0$, 图形上升.

当 $x > e$ 时, $y' < 0$, 图形下降.

当 $x = e$ 时, 有极大值 $y = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.45$.

$$y'' = x^{\frac{1}{x}-4}(1 - 2\ln x + \ln^2 x - 3x + 2x\ln x).$$

令 $y'' = 0$, 得 $x \approx e^{1.48} \approx 4.39$,

事实上, 令 $g(x) = 1 - 2\ln x + \ln^2 x - 3x + 2x\ln x$,

对 $g(x)$ 进行讨论知, $g(x) = 0$ 有唯一根 x_0 , 且

$$g(e^{\frac{1}{e}}) < 0, g(e^{\frac{3}{2}}) > 0,$$

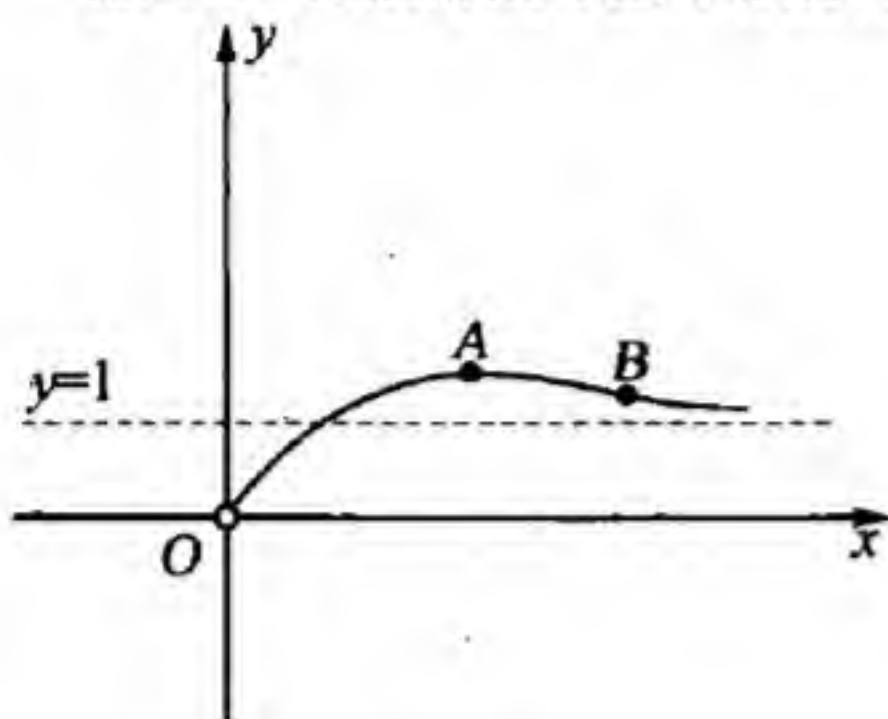
故 $e^{\frac{1}{e}} < x_0 < e^{\frac{3}{2}}$.

当 $0 < x < e^{1.48}$ 时, $y'' < 0$, 图形是凸的.

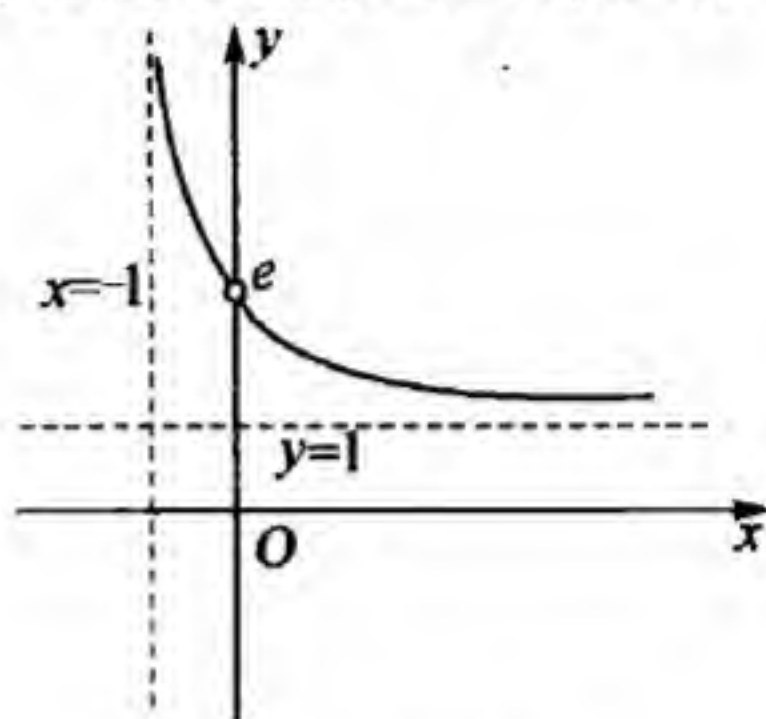
当 $x > e^{1.48}$ 时, $y'' > 0$, 图形是凹的.

故 $x = e^{1.48}$ 是拐点. 又 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{x}} = 0$.

如 1527 题图所示. 图中所示各点为 $A(e, 1.45)$, $B(4.39, 1.4)$.



1527 题图



1528 题图

【1528】 $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解 定义域为 $x > -1, x \neq 0$, 由 $y > 0$ 知图形在 Ox 轴上方

$$y' = \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^2} \left[\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \right].$$

设 $g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x),$

则 $g'(x) = -\frac{x}{(1+x)^2},$

则当 $x < 0$ 时, $g'(x) > 0$;

当 $x > 0$ 时, $g'(x) < 0$, 所以

$$g(x) < g(0) = 0,$$

故 $y' < 0$, 从而图线下降.

垂直渐近线: $x = -1$,

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^0 = 1,$

所以 $y = 1$ 为曲线的水平渐近线, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$

故 $x = 0$ 为可去不连续点, 图形是凹的.

如 1528 题图所示.

【1529*】 $y = x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (x > 0).$

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - ex) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(1+t)^{\frac{1}{t}} - e}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow +0} \left[(1+t)^{\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{(1+t)} \cdot \frac{t - (1+t)\ln(1+t)}{t^2} \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}}{1+t} \cdot \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-\ln(1+t)}{2t} = -\frac{e}{2},
\end{aligned}$$

所以 $y = e\left(x - \frac{1}{2}\right)$ 为曲线的渐近线

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x + x\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right].$$

$$\text{设 } g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}.$$

$$\text{则 } g'(x) = -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} < 0,$$

即 $g(x)$ 单调减少, 所以

$$g(x) > g(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right] = 0,$$

故 $y' > 0$, 从而曲线单调上升. 又 $\lim_{x \rightarrow +0} y = 0$,

所以, 函数有边界极小值 $y = 0$. 如 1529 题图所示.

$$\text{【1530*】 } y = \frac{\frac{1}{e^{1-x^2}}}{1+x^2} \quad (\text{不研究凸凹性}).$$

解 显然 $y > 0$, 图形在 Ox 轴上方.

间断点 $x = -1$ 及 $x = 1$

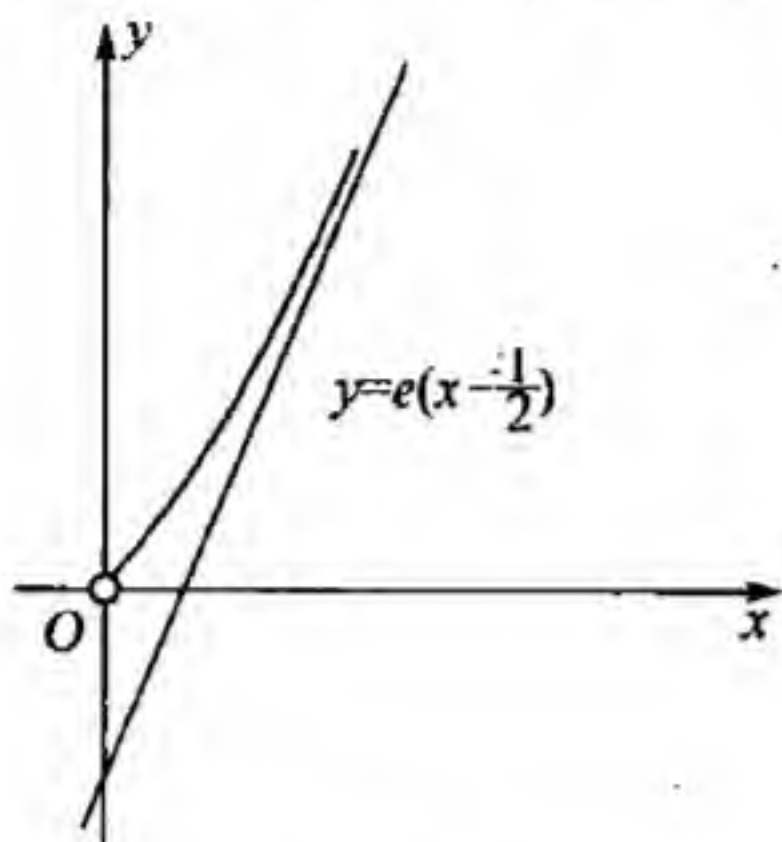
$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} y = +\infty,$$

所以 $y = \pm 1$ 为图形的垂直渐近线, 而

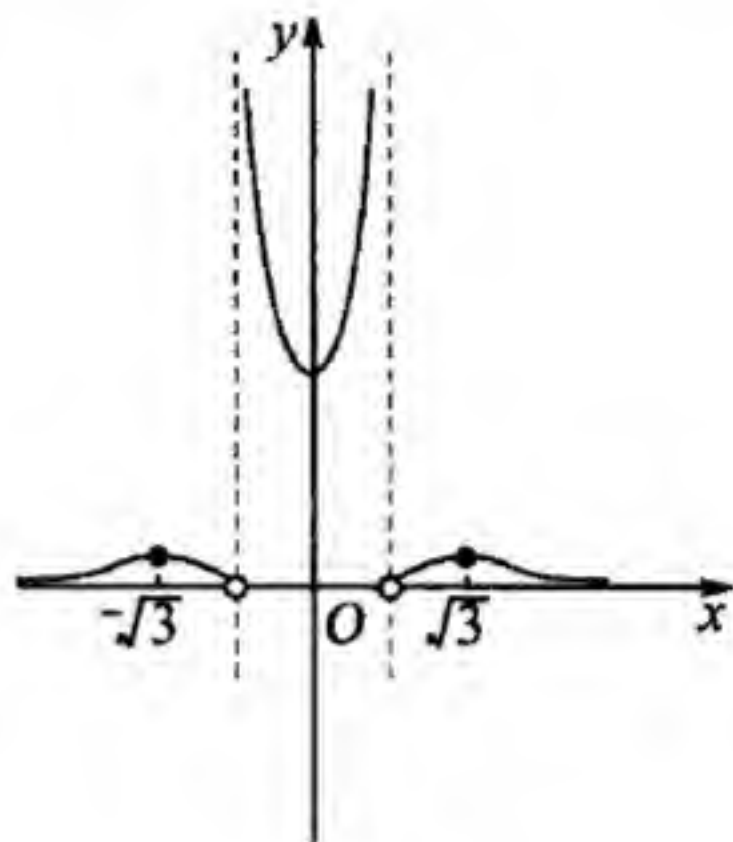
$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} y = 0,$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e^{1-x^2}}}{1+x^2} = 0,$$

所以, $y = 0$ 为曲线的水平渐近线.



1529 题图



1530 题图

$$y' = \frac{2x^3 e^{\frac{1}{1-x^2}} (3-x^2)}{(1-x^2)^2 (1+x^2)^2}.$$

令 $y' = 0$, 得 $x = 0$ 及 $x = \pm\sqrt{3}$,

容易验证:

当 $x = 0$ 时, 有极小值 $y = 0$.

当 $x = -\sqrt{3}$ 时, 有极大值 $y = \frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0.15$.

当 $x = \sqrt{3}$ 时, 有极大值 $y = \frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0.15$.

如 1530 题图所示.

作出下列用参数形式表示的曲线(1531 ~ 1540).

【1531】 $x = \frac{(t+1)^2}{4}, y = \frac{(t-1)^2}{4}.$

解 将参数方程, 化为直角坐标系下的方程

$$\sqrt{x} = \frac{|t+1|}{2}, \sqrt{y} = \frac{|t-1|}{2}.$$

$$\text{当 } t \geq 1 \text{ 时 } \sqrt{x} = \frac{t+1}{2}, \sqrt{y} = \frac{t-1}{2},$$

$$\text{从而 } \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \quad (x \geq 1, x > y).$$

当 $t \leq -1$ 时,

①

$$\sqrt{x} = -\frac{t+1}{2}, \sqrt{y} = -\frac{t-1}{2},$$

从而 $\sqrt{y} - \sqrt{x} = 1, (y \geq 1, y > x).$ ②

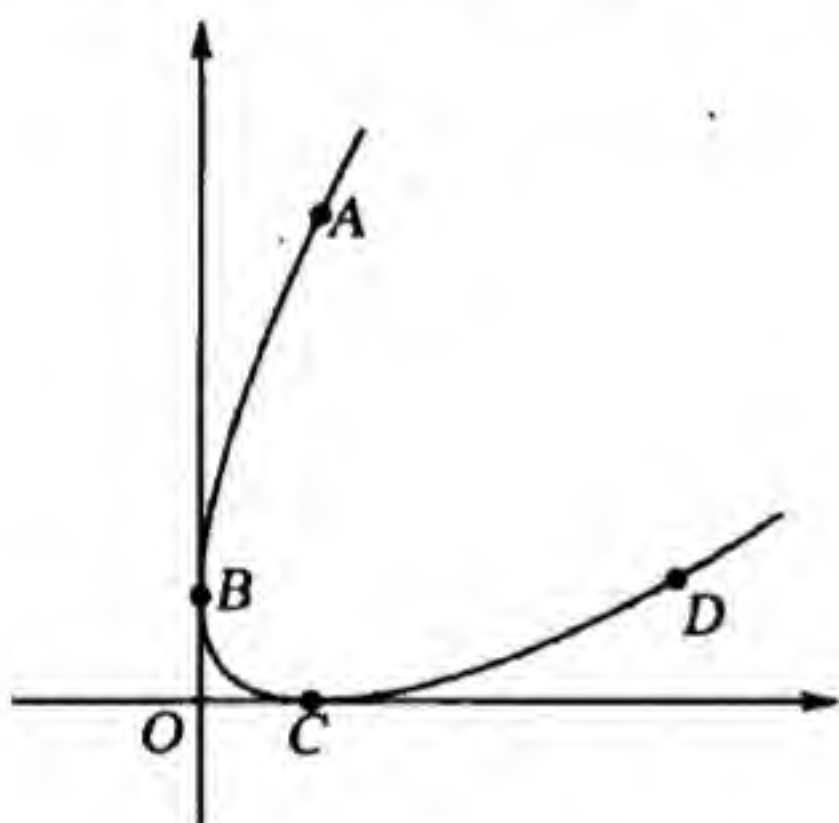
当 $-1 \leq t \leq 1$ 时,

$$\sqrt{x} = \frac{t+1}{2}, \sqrt{y} = \frac{1-t}{2},$$

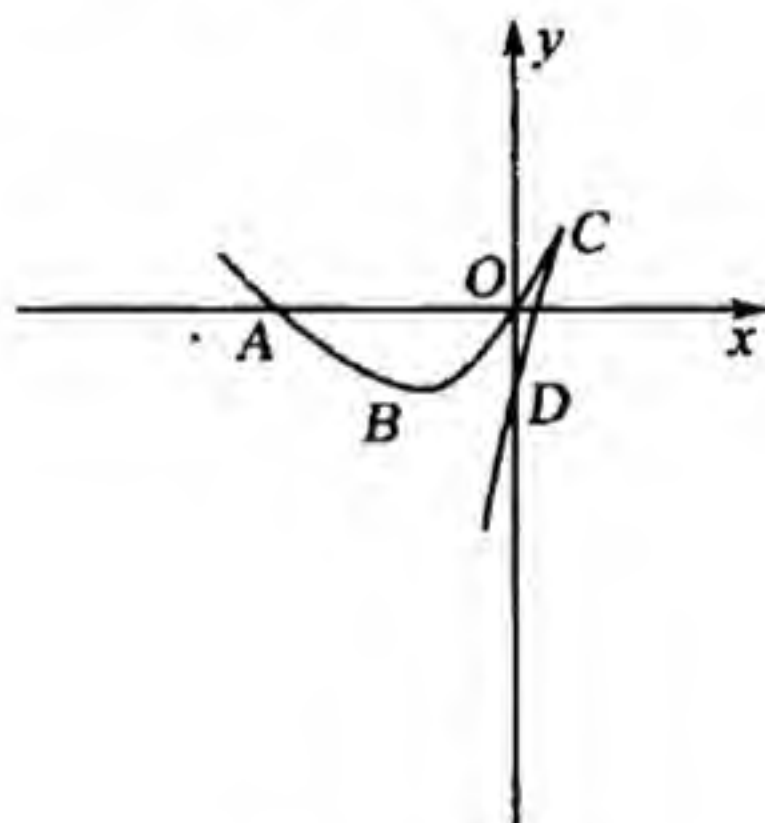
从而 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1).$ ③

由方程 ①, ②, ③ 即得所给曲线的图形. 图形关于直线 $y = x$ 对称, 如 1531 题图所示.

图中各点为 $A(1, 4), B(0, 1), C(1, 0), D(4, 1).$



1531 题图



1532 题图

【1532】 $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3.$

解 $x'_t = 2(1-t), y'_t = 3(1-t^2).$

令 $x'_t = 0$, 得 $t = 1$, 令 $y'_t = 0$, 得 $t = \pm 1$.

作下表

t	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty, -1)$	+	-	由 $-\infty$ 增加到 -3	由 $+\infty$ 减少到 -2
$(-1, 1)$	+	+	由 -3 增加到 1	由 -2 增加到 2
$(1, +\infty)$	-	-	由 1 减少到 $-\infty$	由 2 减少到 $-\infty$

函数的存在域: $x \leq 1$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(1-t^2)}{2(1-t)} = \frac{3}{2}(1+t) \quad (t \neq 1).$$

令 $\frac{dy}{dx} = 0$, 得 $t = -1$, 此时 $x = -3, y = -2$, 图形有极大值点.

$$\text{又 } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4(1-t)},$$

故当 $t > 1$ 时, 图形为凸的.

当 $t < 1$ 时, 图形为凹.

当 $t = 0$ 时, $x = 0, y = 0$.

当 $t = 2$ 时, $x = 0, y = -2$.

当 $t = \sqrt{3}$ 时, $y = 0, x = 0.464$.

$t = -\sqrt{3}$ 时, $y = 0, x \approx -6.464$.

如 1532 题图所示. 图中各点分别为 $A(-6.464, 0), B(-3, -2), C(1, 2), D(0, -2)$.

$$\text{【1533】 } x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t}{t^2-1}.$$

$$\text{解 } x'_t = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}, y'_t = -\frac{1+t^2}{(t^2-1)^2}.$$

令 $x'_t = 0$, 得 $t = 0$ 及 $t = 2$,

当 $t = \pm 1$ 时, x'_t 或 y'_t 不存在.

作下表

t	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty, -1)$	+	-	由 $-\infty$ 增加到 $-\frac{1}{2}$	由 0 减少到 $-\infty$
$(-1, 0)$	+	-	由 $-\frac{1}{2}$ 增加到 0	由 $+\infty$ 减少到 0
$(0, 1)$	-	-	由 0 减少到 $-\infty$	由 0 减少到 $-\infty$
$(1, 2)$	-	-	由 $+\infty$ 减少到 4	由 $+\infty$ 减少到 $\frac{2}{3}$
$(2, +\infty)$	+	-	由 4 增加到 $+\infty$	由 $\frac{2}{3}$ 减少到 0

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+t^2}{t(t-2)(t+1)^2}.$$

当 $t > 2$ 或 $t < 0$ 时 $\frac{dy}{dx} < 0$, 因而曲线下降

当 $0 < t < 2$ 时, $\frac{dy}{dx} > 0$, 曲线上升.

令 $\frac{dy}{dx} = 0$, 得 $t = -1, 0, 2$, 当 $t = 0$ 及 $t = 2$ 时, 曲线有垂直切线 $x = 0$ 及 $x = 4$.

当 $t = -1$ 时 $x = -\frac{1}{2}$, 此为垂直渐近线,

事实上 $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} y = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t}{t^2 - 1} = \infty$,

又 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{2}$,

及 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(y - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-t(t+2)}{2(t+1)} = -\frac{3}{4}$,

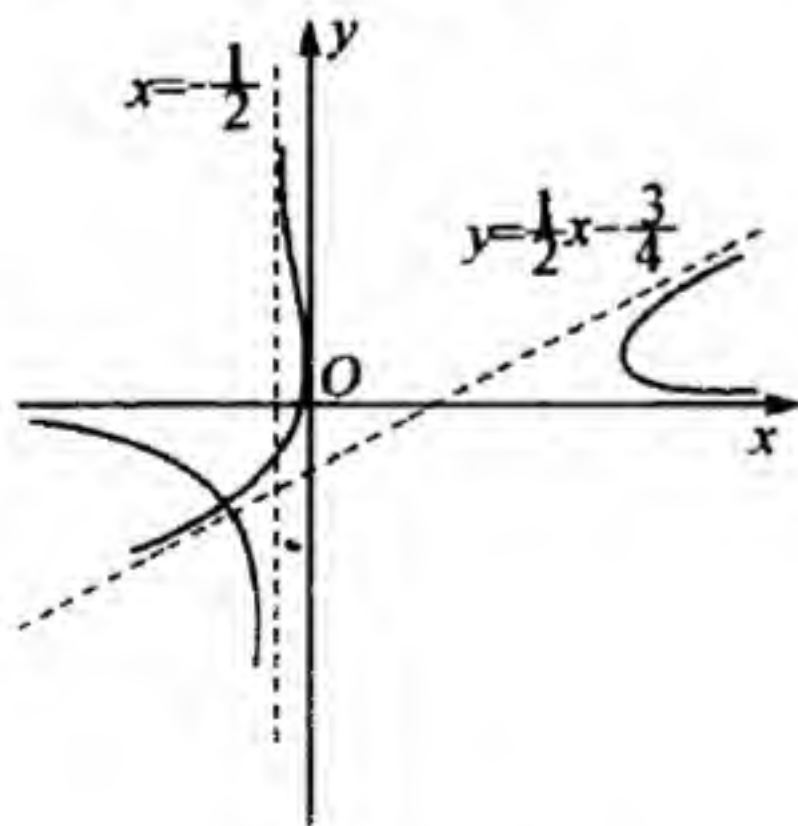
故 $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ 为曲线的斜渐近线.

又当 $t \rightarrow +\infty$ (此时 $x \rightarrow +\infty$) 时, $y \rightarrow 0$.

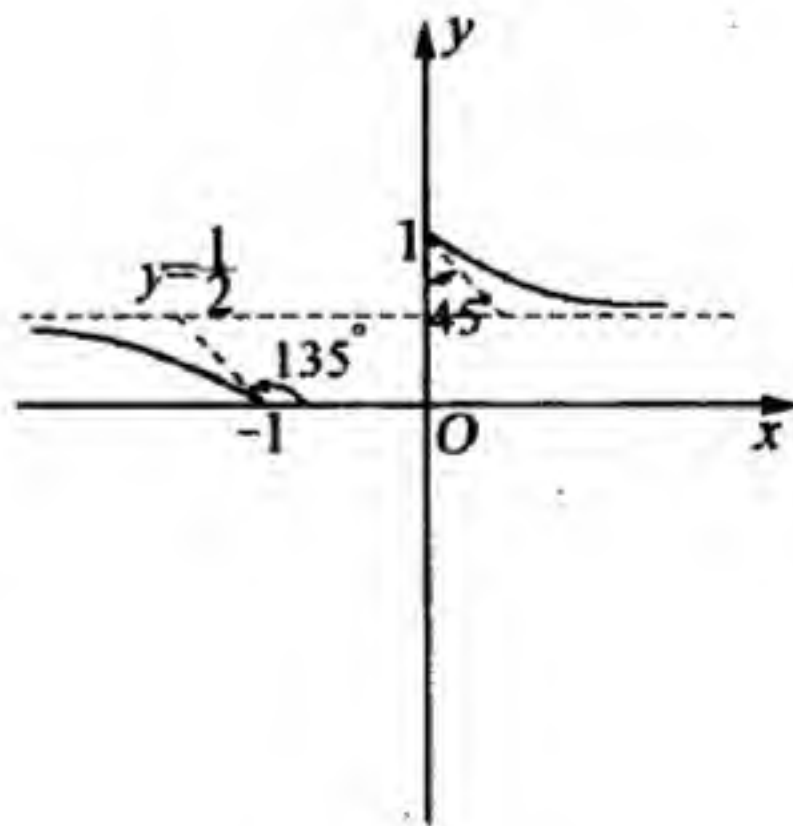
当 $t \rightarrow -\infty$ (此时 $x \rightarrow -\infty$) 时, $y \rightarrow 0$.

所以 $y = 0$, 也为曲线的渐近线.

如 1533 题图所示.



1533 题图



1534 题图

【1534】 $x = \frac{t^2}{1-t^2}, y = \frac{1}{1+t^2}$.

解 因为以 $-t$ 换 t 时 x 及 y 值不变, 故只须考虑 $t \geq 0$. 又

$$t^2 = \frac{x}{1+x},$$

故 $x \geq 0$ 或 $x \leq -1$,

$$x'_t = \frac{2t}{(1-t^2)^2}, y'_t = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}.$$

令 $x'_t = 0, y'_t = 0$,

得 $t = 0$, 而当 $t \rightarrow 1$ 时, $x'_t \rightarrow \infty$,

作下表

t	x'_t	y'_t	x	y
$(0, 1)$	+	-	由 0 增加到 $+\infty$	由 1 减少到 $\frac{1}{2}$
$(1, +\infty)$	+	-	由 $-\infty$ 增加到 -1	由 $\frac{1}{2}$ 减少到 0

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 < 0,$$

曲线下降

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3}.$$

当 $|t| < 1$ 时, $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, 曲线是凹的. 当 $|t| > 1$ 时, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$,

曲线是凸的.

当 $t \rightarrow \pm 1$ 时, $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \frac{1}{2}$,

所以 $y = \frac{1}{2}$ 为曲线的渐近线.

在点 $(-1, 0)$ 处 ($t = +\infty$), $\frac{dy}{dx} = -1$.

在点 $(0, 1)$ 处 ($t = 0$), $\frac{dy}{dx} = -1$.

所以在这两点的切线与 Ox 轴成 $\frac{3\pi}{4}$ 的角, 且这两点为边界极值点.

如 1534 题图所示.

【1535】 $x = t + e^{-t}, y = 2t + e^{-2t}$.

解 $x'_t = 1 - e^{-t},$

$$y'_t = 2(1 - e^{-2t}),$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(1 + e^{-t}) = \frac{2(e^t + 1)}{e^t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{e^t - 1}.$$

当 $t = 0, x'_t = 0, y'_t = 0,$

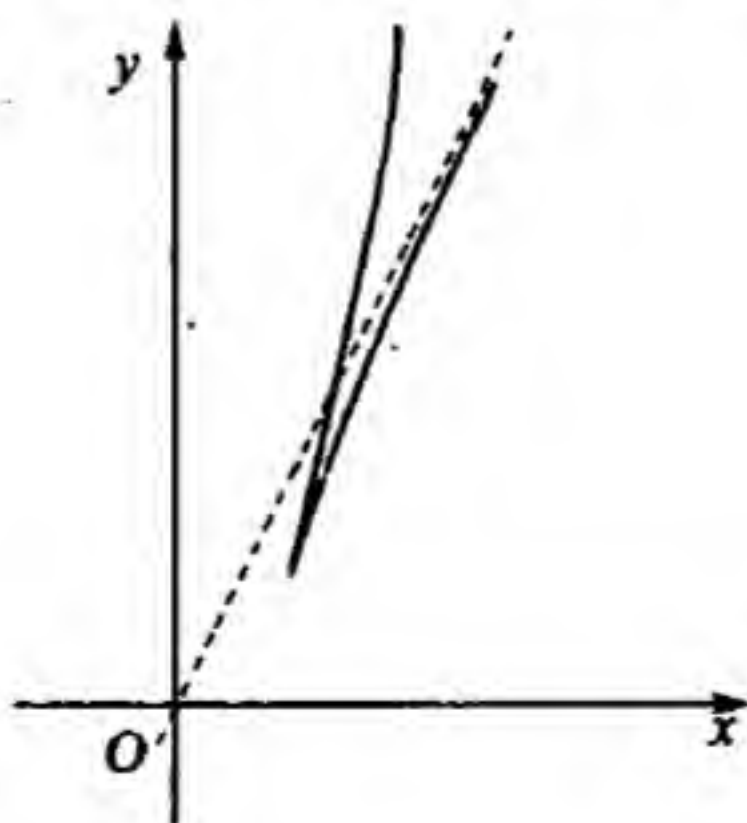
作下表

t	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	图形
$(-\infty, 0)$	-	-	由 $+\infty$ 减少到 1	由 $+\infty$ 减少到 1	+	+	\nearrow U
$(0, +\infty)$	+	+	由 1 增加到 $+\infty$	由 1 增加到 $+\infty$	+	-	\nearrow ∩

又 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t + e^{-2t}}{t + e^{-t}} = 2,$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} (y - 2x) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [2t + e^{-2t} - 2(t + e^{-t})] \\ &= 0, \end{aligned}$$

所以 $y = 2x$ 为曲线的渐近线. 当 $t = 0$ 时, $x = 1, y = 1$, 当 $t = -\ln 2$ 时, 曲线与渐近线相交. 如 1535 题图所示.



1535 题图

【1536】 $x = a\cos 2t, y = a\cos 3t \quad (a > 0).$

解 显然

$$a\cos 2(t + 2\pi) = a\cos 2t,$$

$$a\cos 3(t + 2\pi) = a\cos 3t,$$

所以,我们只要考虑 $0 \leq t \leq 2\pi$ 时 x, y 的变化

$$x'_t = -2a\sin 2t,$$

$$y'_t = -3a\sin 3t.$$

令 $x'_t = 0, y'_t = 0$ 得

$$t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi.$$

作下表

t	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$(0, \frac{\pi}{3})$	—	—	由 a 减少到 $-\frac{a}{2}$	由 a 减少到 $-a$	+	上升
$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$	—	+	由 $-\frac{a}{2}$ 减少到 $-a$	由 $-a$ 增到 0	—	下降
$(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$	+	+	由 $-a$ 增加到 $-\frac{a}{2}$	由 0 增加到 a	+	上升
$(\frac{2\pi}{3}, \pi)$	+	—	由 $-\frac{a}{2}$ 增加到 a	由 a 减少到 $-a$	—	下降
$(\pi, \frac{4\pi}{3})$	—	+	由 a 减少到 $-\frac{a}{2}$	由 $-a$ 增加到 a	—	下降
$(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$	—	—	由 $-\frac{a}{2}$ 减少到 $-a$	由 a 减少到 a	+	上升
$(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3})$	+	—	由 $-a$ 增加到 $-\frac{a}{2}$	由 0 减到 $-a$	—	下降
$(\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$	+	+	由 $-\frac{a}{2}$ 增加到 a	由 $-a$ 增加 a	+	上升

当 $t = \frac{\pi}{3}$ 时, $\frac{dy}{dx} = 0, x = -\frac{a}{2}, y = -a.$

当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{dy}{dx} = \infty, x = -a, y = 0.$

当 $t = \frac{2\pi}{3}$ 时, $\frac{dy}{dx} = 0, x = -\frac{a}{2}, y = a.$

当 $t = \pi$ 时, $\frac{dy}{dx} = -\frac{9}{4}$ (利用洛必达法则)

$$x = a, y = -a.$$

当 $t = \frac{4\pi}{3}$ 时, $\frac{dy}{dx} = 0, x = -\frac{a}{2}, y = a.$

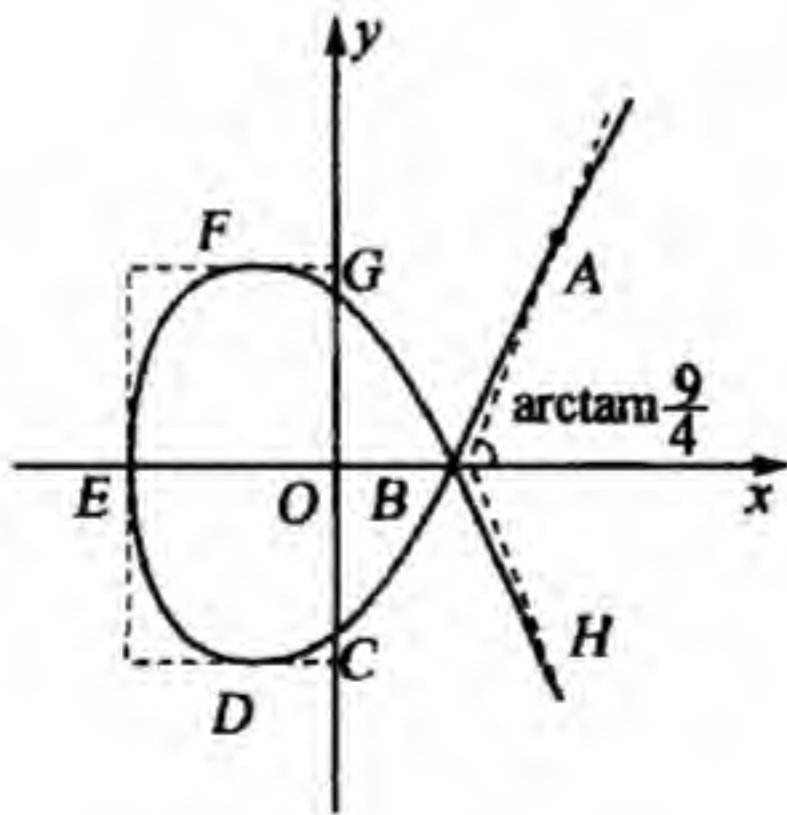
当 $t = \frac{3\pi}{2}$ 时, $\frac{dy}{dx} = \infty, x = -a, y = 0.$

当 $t = \frac{5\pi}{3}$ 时, $\frac{dy}{dx} = \infty, x = -\frac{a}{2}, y = -a.$

当 $t = 0$ 时, $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{4}$ (利用洛必达法则)

$$x = y = a.$$

如 1536 题图所示, 图中各点为 $A(a, a), B(\frac{a}{2}, 0), C(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a), D(-\frac{a}{2}, -a), E(-a, 0), F(-\frac{a}{2}, a), G(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a), H(a, -a).$



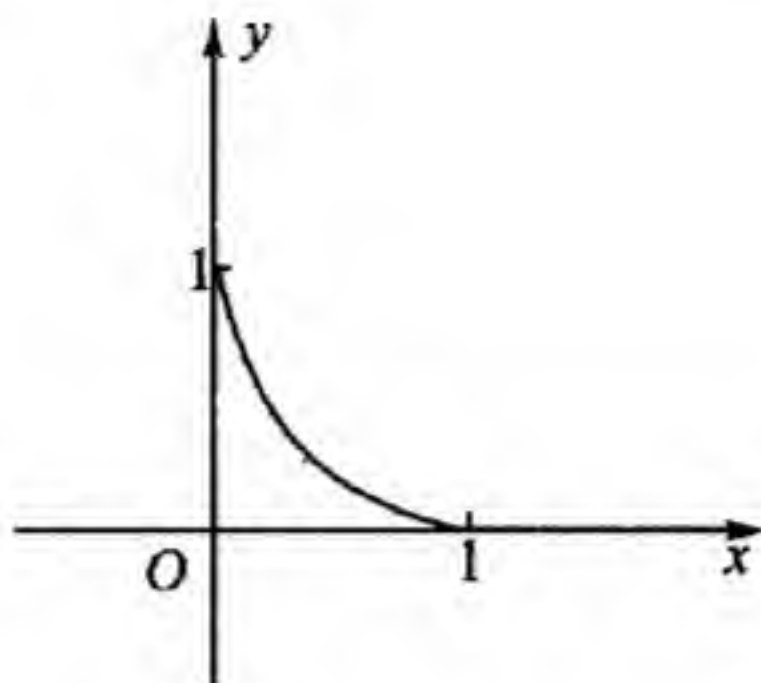
1536 题图

【1537】 $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t.$

解 $\sqrt{x} = \cos^2 t, \sqrt{y} = \sin^2 t,$

所以 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1.$

如 1537 题图.



1537 题图

【1538】 $x = t \ln t, y = \frac{\ln t}{t}.$

解 当 $t > 0$ 时, x, y 才有意义.

$$x'_t = 1 + \ln t,$$

$$y'_t = \frac{1 - \ln t}{t^2}.$$

令 $x'_t = 0, y'_t = 0$ 得 $x = \frac{1}{e}$ 及 $x = e,$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \ln t}{t^2(1 + \ln t)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\ln^2 t - 4}{t^3(1 + \ln t)^2},$$

当 $t = e$ 时, 图形有极大值点: $A\left(e, \frac{1}{e}\right).$

令 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, 得 $t = e^{\sqrt{2}}$ 及 $t = e^{-\sqrt{2}}.$

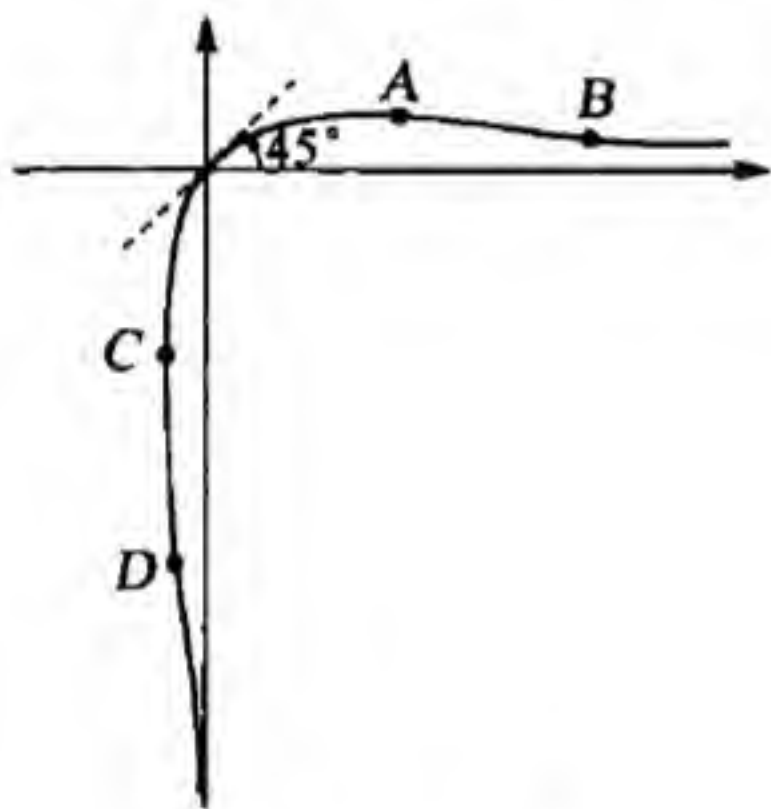
图形有拐点 $B\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$ 及 $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}, -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\right).$ 当 $e^{-\sqrt{2}} < t < e^{\sqrt{2}}$ 时, 曲线是凸的. 当 $0 < t < e^{-\sqrt{2}}$ 及 $e^{\sqrt{2}} < t < +\infty$ 时, 曲线是凹的. 当 $0 < t < \frac{1}{e}$ 及 $e < t < +\infty$ 时, $\frac{dy}{dx} > 0$, 曲线下降. 当 $\frac{1}{e} < t < e$ 时, 曲线上升.

当 $t = 1$ 时, $x = 0, y = 0$, 即曲线过点 $(0, 0)$, 且 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0,0)} = 1$.

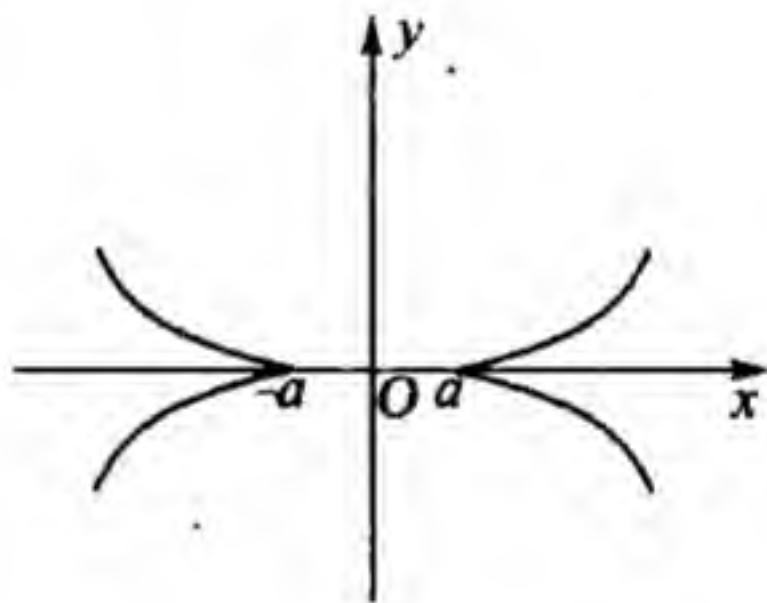
当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$, 所以 $y = 0$ 为曲线的水平渐近线.

当 $t \rightarrow +0$ 时, $x \rightarrow -0, y \rightarrow -\infty$, 故 $x = 0$ 为曲线的垂直渐近线.

如 1538 题图所示. 图中各点为 $A(e, \frac{1}{e}), B(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}), C(-\frac{1}{e}, -e), D(-\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}, -2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}})$.



1538 题图



1539 题图

【1539】 $x = \frac{a}{\cos^3 t}, y = a \tan^3 t \quad (a > 0)$.

解 将参数方程化为直角坐标系下的方程 $x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. 显然, $|x| \geq a$, 且图形关于两坐标轴对称, 故只须讨论 $x > a, y > 0$ 的情形.

由于 $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}},$

$$y'' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} (y^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}),$$

注意到, 当 $x > 0, y > 0$ 时, 有 $x > y$, 从而有 $y' > 0, y'' > 0$, 故图形上升且呈凹状. 而 $y'_{\substack{x=a \\ y=0}} = 0$, 故在 $(a, 0)$ 点的切线为 $y = 0$, 如 1539 题图所示.

【1540】 $x = a(\operatorname{sh} t - t), y = a(\operatorname{ch} t - 1)$ ($a > 0$).



解 当用 $-t$ 代替 t 时, x 的绝对值不变, 但符号相反, 而 y 却不变. 故图形关于 Oy 轴对称.

$$x' = a(\operatorname{ch} t - 1), y' = a \operatorname{sh} t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t + 1}{e^t - 1} \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{4e^{2t}}{a(e^t - 1)^4} < 0,$$

故曲线是凸的.

作下表

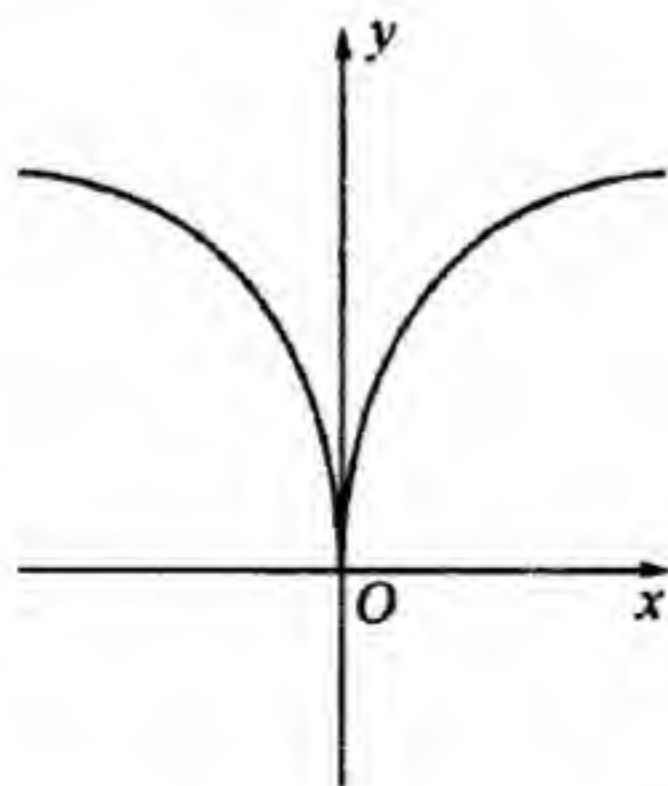
t	x'	y'	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$(-\infty, 0)$	+	-	由 $-\infty$ 增加到 0	由 $+\infty$ 减少到 0	-	
$(0, +\infty)$	+	+	由 0 增加到 $+\infty$	由 0 增加到 $+\infty$	+	

当 $t \rightarrow -0$ 时, $\frac{dy}{dx} \rightarrow -\infty$.

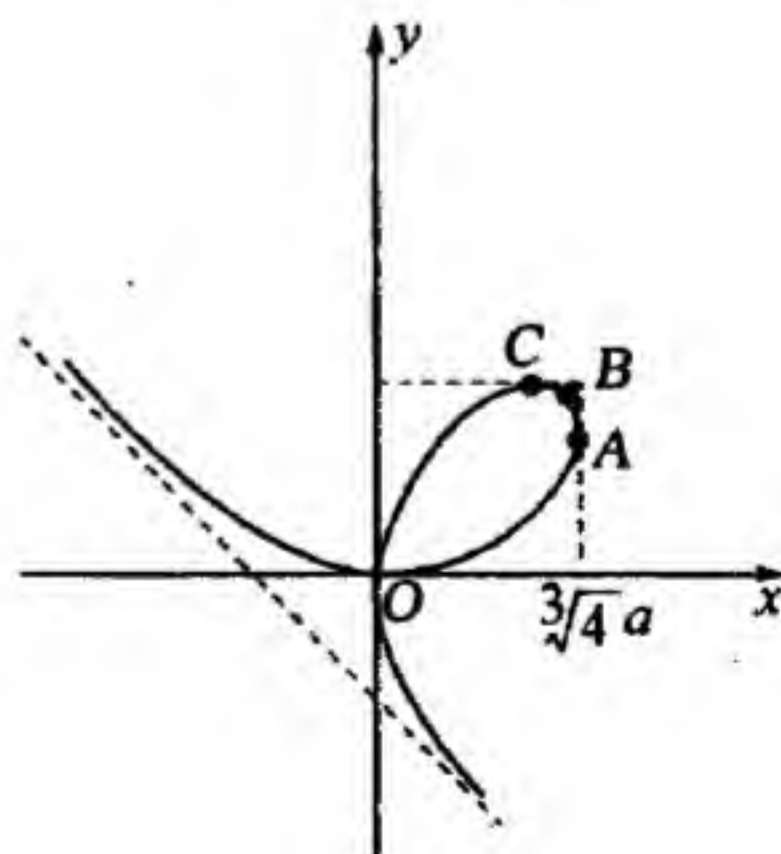
当 $t \rightarrow +0$ 时, $\frac{dy}{dx} \rightarrow +\infty$, 而当 $t = 0$ 时 $x = y = 0$. 故在 $(0, 0)$

的切线为 $x = 0$.

如 1540 题图所示.



1540 题图



1541 题图

将下列曲线方程表示成参数形式,再作出这些曲线,若(1541~1544).

【1541】 $x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0).$

提示:假设 $y = tx$.

解 设 $y = tx$,代入原方程,得

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3},$$

$$x'_t = \frac{6a\left(\frac{1}{2} - t^3\right)}{(1+t^3)^2},$$

$$y'_t = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

令 $x'_t = 0$ 及 $y'_t = 0$ 得 $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0, \sqrt[3]{2}$, 而当 $t \rightarrow -1$ 时, $x'_t \rightarrow \infty, y'_t \rightarrow \infty$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3},$$

作下表

t	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty, -1)$	+	-	由 0 增加到 $+\infty$	由 0 减少到 $-\infty$
$(-1, 0)$	+	-	由 $-\infty$ 增加 0	由 $+\infty$ 减少到 0
$(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	+	+	由 0 增加到 $\sqrt[3]{4a}$	由 0 增加到 $\sqrt[3]{2a}$
$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2})$	-	+	由 $\sqrt[3]{4a}$ 减少到 $\sqrt[3]{2a}$	由 $\sqrt[3]{2a}$ 增加到 $\sqrt[3]{4a}$
$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$	-	-	由 $\sqrt[3]{2a}$ 减少到 0	由 $\sqrt[3]{4a}$ 减少到 0

当 $t \rightarrow -1$ 时, $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$, 且

$$\lim_{t \rightarrow -1} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} = -1,$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -1} (y+x) &= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at^2 + 3at}{1+t^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{6at + 3a}{3t^2} = -a,\end{aligned}$$

故 $x+y=a$ 为曲线的渐近线.

$$\text{当 } t=0, x=0, y=0, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = 0,$$

$$\text{当 } t \rightarrow +\infty \text{ 时, } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, \frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} \rightarrow \infty.$$

这说明,坐标原点为曲线的二重点,在这一点,曲线的一支与 Ox 轴相切,另一支与 Oy 轴相切. 如 1541 题图所示.

$$\text{【1542】 } x^2 + y^2 = x^4 + y^4.$$

解 显然,曲线对 Ox 轴, Oy 轴及直线 $y=\pm x$ 对称,设 $x=ty$, 则当 $y \neq 0$ 时,

$$y = \pm \sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}},$$

根据对称性,不妨只考察方程

$$\begin{cases} x = t \sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}} \\ y = \sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}} \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1),$$

即只考虑介于正半纵轴及直线 $y=x$ 之间的曲线 ($0 \leq x \leq 1, x \leq y$), 然后根据对称性作出全部曲线, 当 t 由 0 连续地变到 1 时曲线上的点由 (0,1) 连续地变到 (1,1)

$$x'_t = \sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}} + \sqrt{\frac{t^4+1}{t^2+1}} \cdot \frac{t^2(1-2t^2-t^4)}{(t^4+1)^2},$$

$$y'_t = \sqrt{\frac{t^4+1}{t^2+1}} \cdot \frac{t(1-2t^2-t^4)}{(t^4+1)^2}.$$

$$\text{令 } \frac{dy}{dx} = 0, \text{ 得 } t = 0, \sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

当 $t = 0$ 时, $x = 0, y = 1$ (极小值).

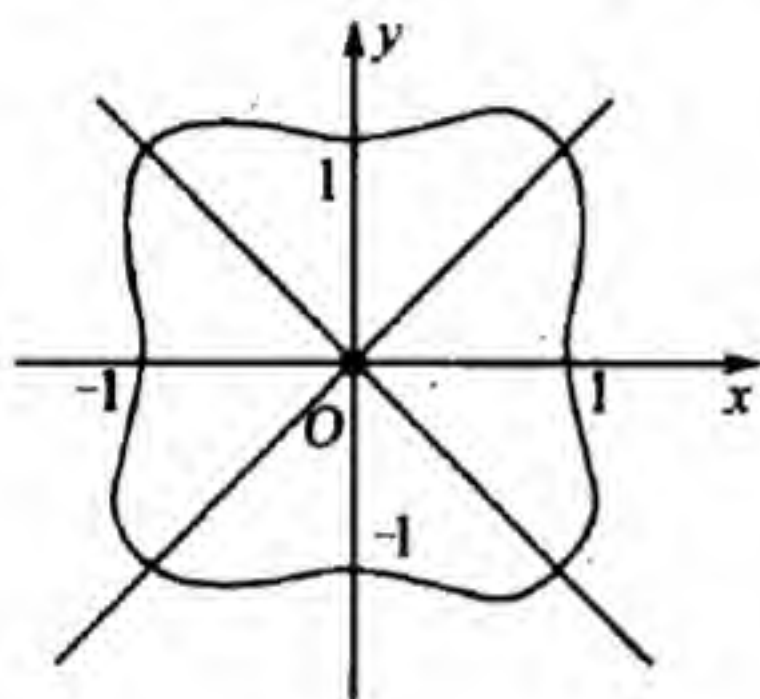
当 $t = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ 时,

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71,$$

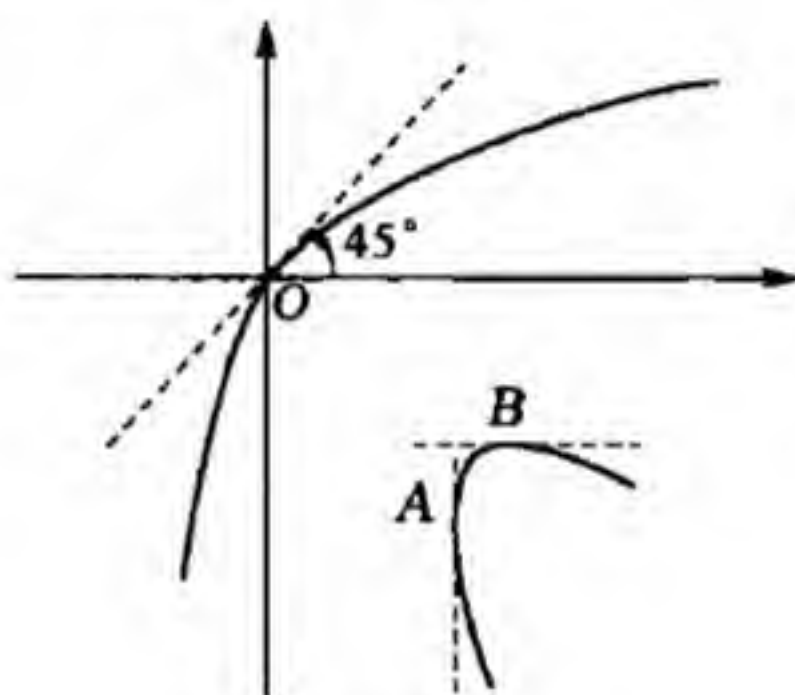
$$y = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} \approx 1.1 \quad (\text{极大值}).$$

作图并利用对称性可得.

曲线的图形如 1542 题图所示, $(0, 0)$ 是孤立点.



1542 题图



1543 题图

【1543】 $x^2 y^2 = x^3 - y^3$.

解 设 $y = tx$, 代入得

$$x = \frac{1-t^3}{t^2},$$

$$y = \frac{1-t^3}{t} (t \neq 0),$$

$$x'_t = -\frac{2+t^3}{t^3},$$

$$y'_t = -\frac{1+2t^3}{t^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(1+2t^3)}{2+t^3}.$$

当 $t = -\sqrt[3]{2}$ 时, $x'_t = 0$.

当 $t = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 时, $y'_t = 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} x'_t = 0, \lim_{t \rightarrow 0} y'_t = 0.$$

作下表

t	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty, -\sqrt[3]{2})$	-	+	由 $+\infty$ 减少到 $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	由 $-\infty$ 增加到 $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$
$(\sqrt[3]{2}, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	+	+	由 $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ 增加到 $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	由 $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ 增加到 $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$
$(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0)$	+	-	由 $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ 增加到 $+\infty$	由 $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ 减少到 $-\infty$
$(0, +\infty)$	-	-	由 $+\infty$ 减少到 $-\infty$	由 $+\infty$ 减少到 $-\infty$

当 $t = 1$ 时, $x = y = 0, \frac{dy}{dx}\bigg|_{t=1} = 1$.

当 $t = -\sqrt[3]{2}$ 时, $x = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}, y = -\frac{3}{\sqrt[3]{2}}, \frac{dy}{dx}\bigg|_{t=-\sqrt[3]{2}} = \infty$.

当 $t = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 时, $x = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}, y = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \frac{dy}{dx}\bigg|_{t=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = 0$.

如 1543 题图所示. 图中各点为 $A(\frac{3}{\sqrt[3]{4}}, -\frac{3}{\sqrt[3]{2}}), B(\frac{3}{\sqrt[3]{2}}, -\frac{3}{\sqrt[3]{4}})$.

【1544】 $x^y = -y^x \quad (x > 0, y > 0)$.

解 显然直线 $y = x (x > 0)$ 是图形的一部分. 对于 $y \neq x$ 的部分, 图形关于直线 $y = x$ 对称. 设 $y = (1+t)x$ 代入解得 $x = (1+t)^{\frac{1}{t}}, y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}$,

由条件 $x > 0, y > 0$ 知, $-1 < t < +\infty$,

而 $\lim_{t \rightarrow -1+0} x = \lim_{t \rightarrow -1+0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = +\infty$,

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} y = \lim_{t \rightarrow -1+0} (1+t)^{1+\frac{1}{t}} = 1,$$

及 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1+t)^{\frac{1}{t}} = 1$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1+t)^{1+\frac{1}{t}} = +\infty,$$

故直线 $x = 1$ 和 $y = 1$ 是曲线的渐近线.

又 $\lim_{t \rightarrow 0} x = \lim_{t \rightarrow 0} y = e,$

故点 (e, e) 是曲线上的二重点 (即在 $y \neq x$ 的部分上又在 $y = x$ 那部分上). 由于

$$x'_t = (1+t)^{\frac{1}{t}} \cdot \frac{t - (1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)},$$

$$y'_t = (1+t)^{1+\frac{1}{t}} \cdot \frac{t - \ln(1+t)}{t^2},$$

所以 $\frac{dy}{dx} = (1+t) \left[1 + \frac{t^2}{t - (1+t)\ln(1+t)} \right] \quad (t \neq 0).$

设 $g(t) = t^2 - [(1+t)\ln(1+t) - t].$

则 $g'(t) = 2t - \ln(1+t), g''(t) = 2 - \frac{1}{1+t}.$

当 $0 \leq t < +\infty$ 时, $g''(t) > 0$, 所以 $g'(t)$ 单调增加, 从而

$$g'(t) > g'(0) = 0,$$

因而有 $g(t) = t^2 - [(1+t)\ln(1+t) - t] > g(0) = 0,$

即 $t^2 > (1+t)\ln(1+t) - t.$

又显然 $(1+t)\ln(1+t) - t > 0 \quad (0 < t < +\infty),$

所以 $\frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t) - t} > 1 \quad (0 < t < +\infty),$

于是当 $0 < t < +\infty$ 时,

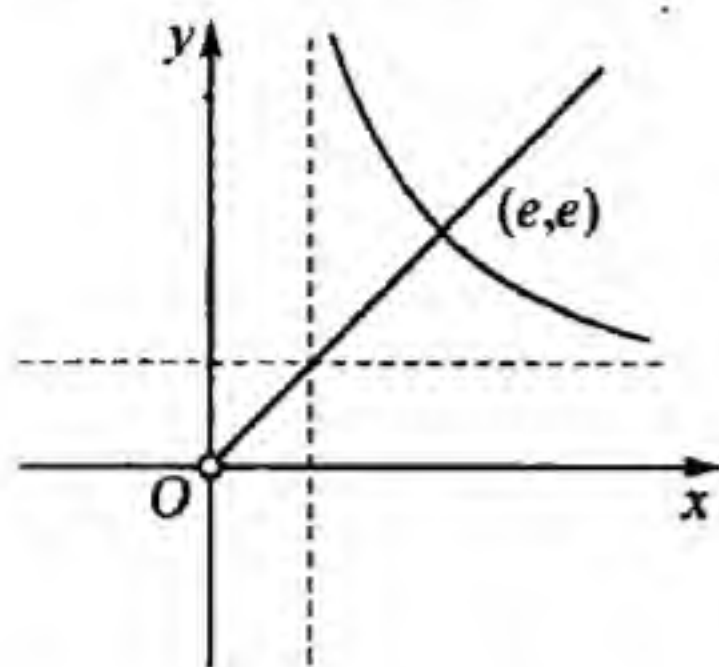
$$\frac{dy}{dx} = (1+t) \left[1 - \frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t) - 1} \right] < 0,$$

同样讨论可知, 当 $-1 < t < 0$ 时, $\frac{dy}{dx} < 0$, 而当 $t = 0$ 时

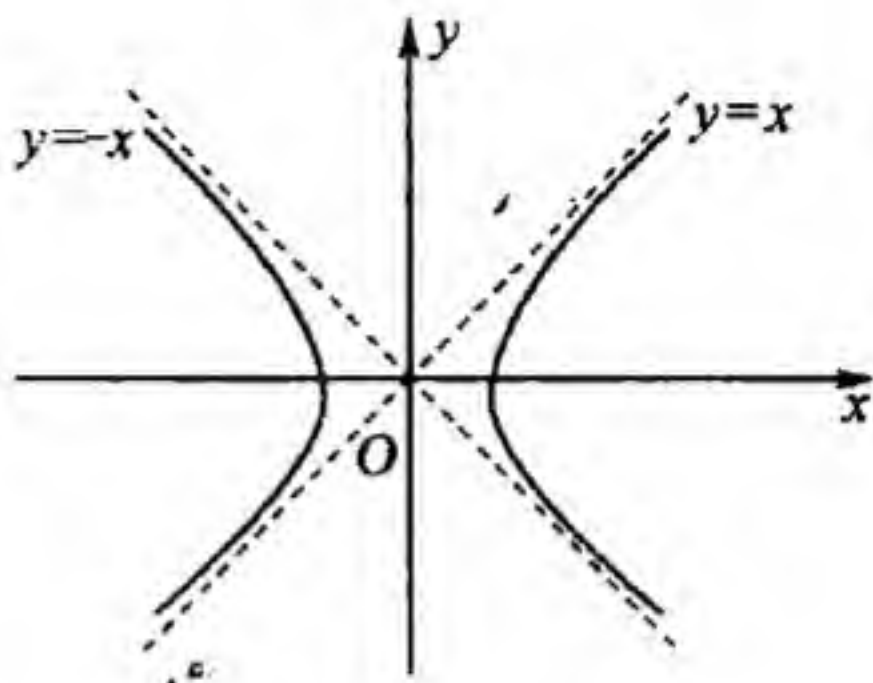
$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = -1,$$

所以, 曲线始终是单调下降的.

如 1544 题图所示



1544 题图



1545 题图

【1545】 作出曲线 $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y = 1$ 的图形.

解 显然, 曲线关于两坐标轴是对称的, 故只须考虑在第一象限 $x \geq 0, y \geq 0$ 内的部分.

因为 $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y = 1$,

从而 $y = \ln(\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}) \quad (x \geq 0),$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1})}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}} \left(\operatorname{ch} x + \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 x + 1}{\operatorname{sh}^2 x - 1}} = 1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}) - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}}{e^x}, \end{aligned}$$

而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}}{e^x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} x + \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}}}{e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1})}{e^x \cdot \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}} = 1,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = 0$.

因此, 直线 $y = x$ 是曲线的渐近线, 函数的定义域为:

$$\operatorname{sh}^2 x - 1 \geq 0,$$

即 $x \geq \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0.88$.

当 $x = \ln(1 + \sqrt{2})$ 时, $y = 0$, 又

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{1}{\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}} \left(\operatorname{ch} x + \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}} \right) \\ &= \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}} > 0, \end{aligned}$$

$$y''_x = \frac{-2\operatorname{sh} x}{(\operatorname{sh}^2 x - 1)^{\frac{3}{2}}} < 0,$$

因此, 曲线单调上升, 并呈凸状, 利用对称性, 可得曲线的图形如 1545 题图所示.

作出下列用极坐标 (φ, r) ($r \geq 0$) 表示的函数的图形 (1546 ~ 1541).

【1546】 $r = a + b \cos \varphi$ ($0 < a \leq b$).

解 当 $a = b$ 时, $r = a(1 + \cos \varphi)$ 这是心脏线如 1546 题图 1 所示.

当 $0 < a < b$ 时, 其图形叫蚶线,

由于 $r(-\varphi) = r(\varphi)$, 故图形关于极轴对称.

当 $r \geq 0$ 时,

$$|\varphi| \leq \alpha = \arccos\left(-\frac{a}{b}\right),$$

$$r'_\varphi = -b \sin \varphi < 0, \left(0 < \varphi < \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)\right).$$

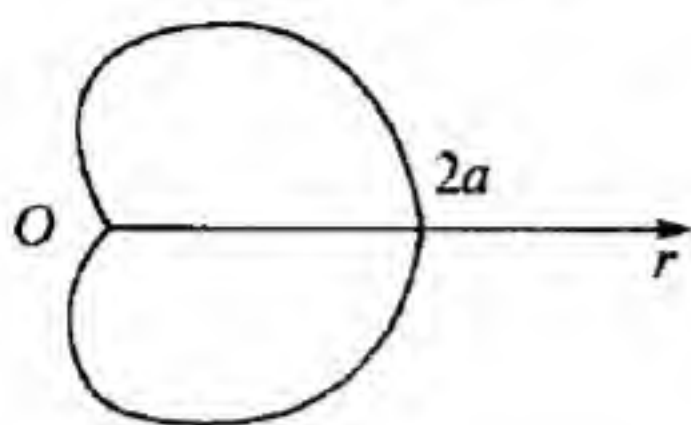
当 $\varphi = 0$ 时, r 有极大值 $r = a + b$.

当 $\varphi = \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$ 有边界极小值 $r = 0$.

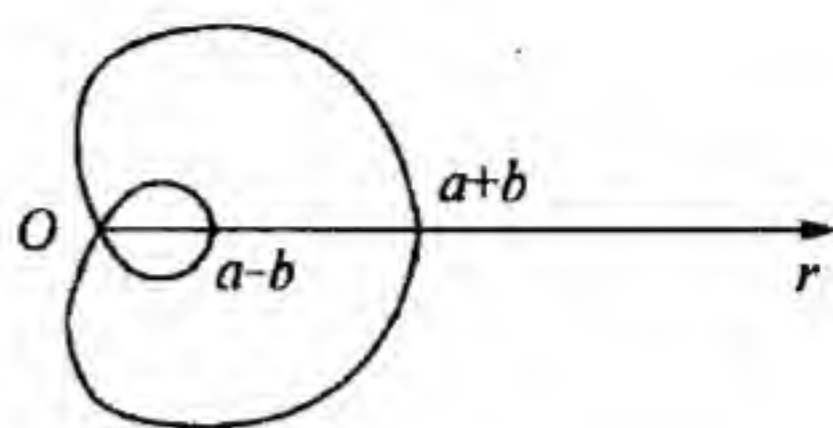
当 φ 由 0 变到 α 时, r 由 $(a + b)$ 变到 0.

当 $r < 0$ 时, $\alpha < |\varphi| \leq \pi$. 当 φ 由 α 变到 π 时, r 由 0 减少到 $a - b$.

极点 O 为二重点. 如 1546 题图 2 所示.



1546 题图 1



1546 题图 2

【1547】 $r = a \sin 3\varphi$ ($a > 0$).

解 因为 $r(\varphi + \frac{2\pi}{3}) = r(\varphi)$,

故函数 $r = a \sin 3\varphi$ 是以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期的周期函数, 函数的定义域为:

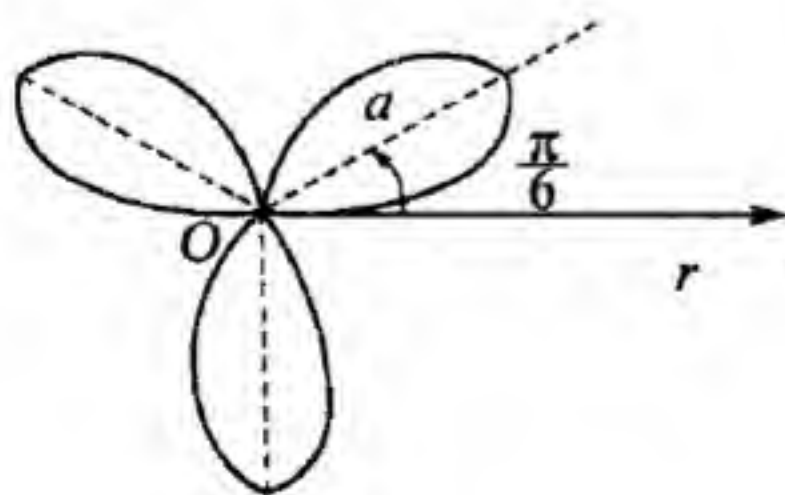
$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi, \frac{4\pi}{3} < \varphi < \frac{5\pi}{3}$$

故只要讨论 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ 即可.

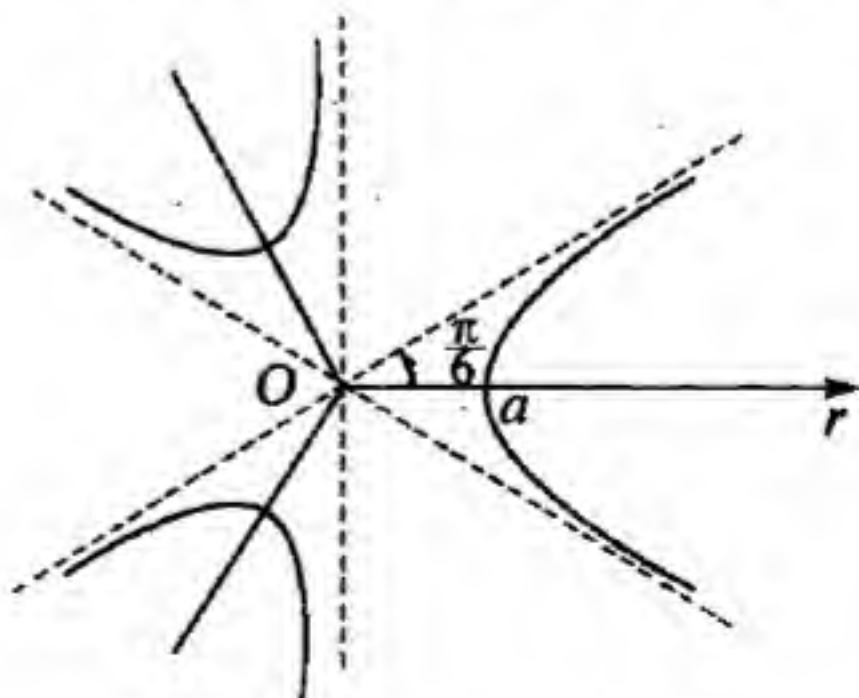
$$r'_{\varphi} = 3a \cos 3\varphi.$$

当 $x \in (0, \frac{\pi}{6})$ 时, $r'_{\varphi} > 0$, 当 $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ 时 $r'_{\varphi} < 0$, 故当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, r 有极大值 $r = a$, 当 $\varphi = 0, \frac{\pi}{3}$ 时, r 有极小值 $r = 0$.

射线 $\varphi = \frac{\pi}{6}, \varphi = \frac{5\pi}{6}, \varphi = \frac{3\pi}{2}$ 为曲线的三对称轴. 曲线在 $O(0, 0)$ 有三重点, 整个曲线有三个形状相同的叶. 如 1547 题图所示.



1547 题图



1548 题图

【1548】 $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}} \quad (a > 0).$

解 由于 $r\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = r(\varphi).$

故 $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$ 是以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期的周期函数, 又 $r(-\varphi) = r(\varphi)$, 故

图形关于极轴对称.

函数的定义域为: $|\varphi| < \frac{\pi}{6}$, 及 $\frac{\pi}{2} < |\varphi| < \frac{5\pi}{6}$ 为此只要讨论

$-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$ 即可.

$$r'_{\varphi} = \frac{3a \sin 3\varphi}{2(\cos 3\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

当 $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 时, $r'_{\varphi} < 0$; 当 $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 时, $r'_{\varphi} > 0$.

故当 $\varphi = 0$ 时, r 有极小值 $r = a$. 而 $\lim_{\varphi \rightarrow \pm \frac{\pi}{6}} r = +\infty$,

故 $\varphi = \pm \frac{\pi}{6}$ 为曲线的渐近线. 如 1548 题图所示.

【1549*】 $r = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1}, \varphi > 1 \quad (a > 0).$

解 $\lim_{\varphi \rightarrow 1+0} r = \lim_{\varphi \rightarrow 1+0} a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} = +\infty,$

$$\lim_{\varphi \rightarrow +\infty} r = \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \frac{a \operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} = 0,$$

从而曲线以 $\varphi = 1$ 为渐近线, 以极点为渐近点.

$$r'_{\varphi} = a \cdot \frac{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi}(\varphi - 1) - \operatorname{th} \varphi}{(\varphi - 1)^2} = a \frac{\varphi - 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi}{(\varphi - 1)^2 \operatorname{ch}^2 \varphi}$$

当 $1 < \varphi < +\infty$ 时 $\varphi - 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi < 0$,

事实上, 令 $g(\varphi) = \varphi - 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi$.

则 $g'(\varphi) = 1 - \operatorname{ch} 2\varphi < 0 \quad (1 < \varphi < +\infty),$

所以 $g(\varphi)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调减少, 故

$$g(\varphi) < g(1) = -\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 < 0,$$

因此 $r'_\varphi < 0$, 即当 φ 增大时, r 单调减. 考虑曲线上点的直角坐标

$$(x, y): x = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \cos \varphi, y = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \sin \varphi,$$

当 $\varphi \rightarrow 1+0$ 时, $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$, 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{\varphi \rightarrow 1+0} \tan \varphi = \tan 1.$$

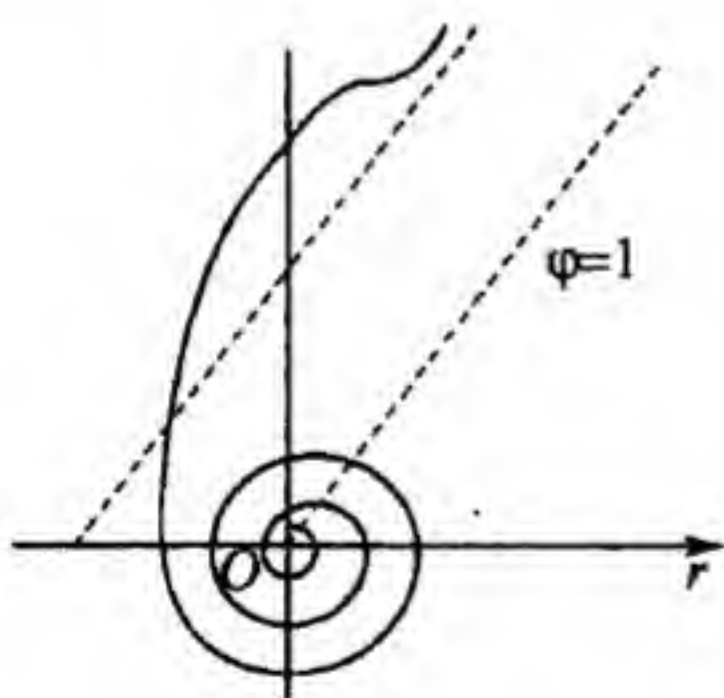
而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x \tan 1)$$

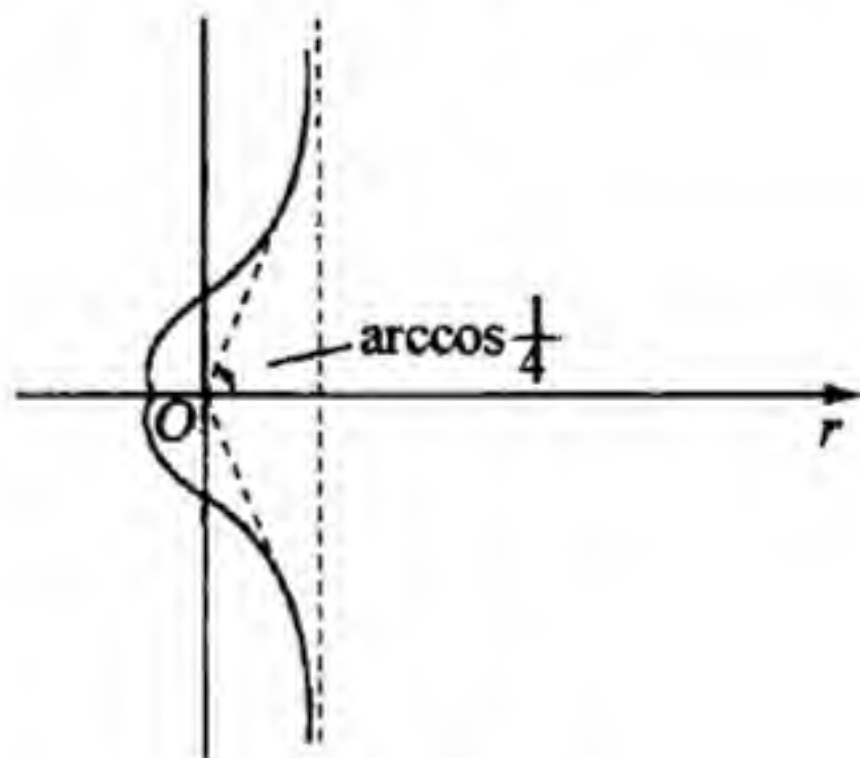
$$= \lim_{\varphi \rightarrow 1+0} \left(a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \sin \varphi - a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \cos \varphi \cdot \tan 1 \right)$$

$$= \lim_{\varphi \rightarrow 1+0} a \operatorname{th} \varphi \cdot \cos \varphi \frac{\tan \varphi - \tan 1}{\varphi - 1} = \frac{a \operatorname{th} 1}{\cos 1}.$$

于是在直角坐标系下, 当 $r \rightarrow +\infty$ 时, 曲线 $r = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1}$ 以直线 $y = x \tan 1 + a \frac{\operatorname{th} 1}{\cos 1}$ 为渐近线. 曲线为螺状线. 如 1549 题图所示.



1549 题图



1550 题图

【1550*】 $\varphi = \arccos \frac{r-1}{r^2}.$

解 显然, 曲线关于极轴对称. 且 $r = r(\varphi)$ 以 2π 为周期, 因此, 只须在 $0 \leq \varphi \leq \pi$ 内讨论.

$$\text{方程可化为 } r = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cos \varphi}}{2 \cos \varphi}.$$

由于必须 $1 - 4\cos\varphi \geq 0$, 故 $\arccos \frac{1}{4} \leq \varphi \leq \pi$,

当 $\varphi = \arccos \frac{1}{4}$ 时 $r = 2$. 由 $r > 0$ 知曲线方程为

$$r = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} \quad \left(\arccos \frac{1}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \right), \quad (1)$$

$$r = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} \quad \left(\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi \right). \quad (2)$$

对于方程 (1) 所表示的曲线

$$r'_\varphi = \frac{(\sqrt{1 - 4\cos\varphi} + 1 - 2\cos\varphi)\sin\varphi}{2\cos^2\varphi \sqrt{1 - 4\cos\varphi}} > 0$$

$$\left(\arccos \frac{1}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \right),$$

且 $\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} r = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} = +\infty$,

所以当 φ 由 $\arccos \frac{1}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时, r 由 2 变到 $+\infty$, 且当 $r \rightarrow +\infty$ 时

有渐近线 $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

设 (x, y) 为曲线上点的直角坐标, 由

$$\cos\varphi = \frac{r-1}{r^2},$$

得 $x = \frac{r-1}{r},$

故当 $r \rightarrow +\infty$ 时, $x \rightarrow 1$, 即曲线与直线 $r = \frac{1}{\cos\varphi}$ ($x = 1$) 无限接近,

对于方程 (2)

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} r = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} = 1,$$

故 $(1, \frac{\pi}{2})$ 为曲线上的点. 又

$$r'_\varphi = \frac{\sin\varphi [\sqrt{1 - 4\cos\varphi} - (1 - 2\cos\varphi)]}{2\cos^2\varphi \sqrt{1 - 4\cos\varphi}}.$$

设 $f(\varphi) = \sqrt{1-4\cos\varphi} - (1-2\cos\varphi)$.

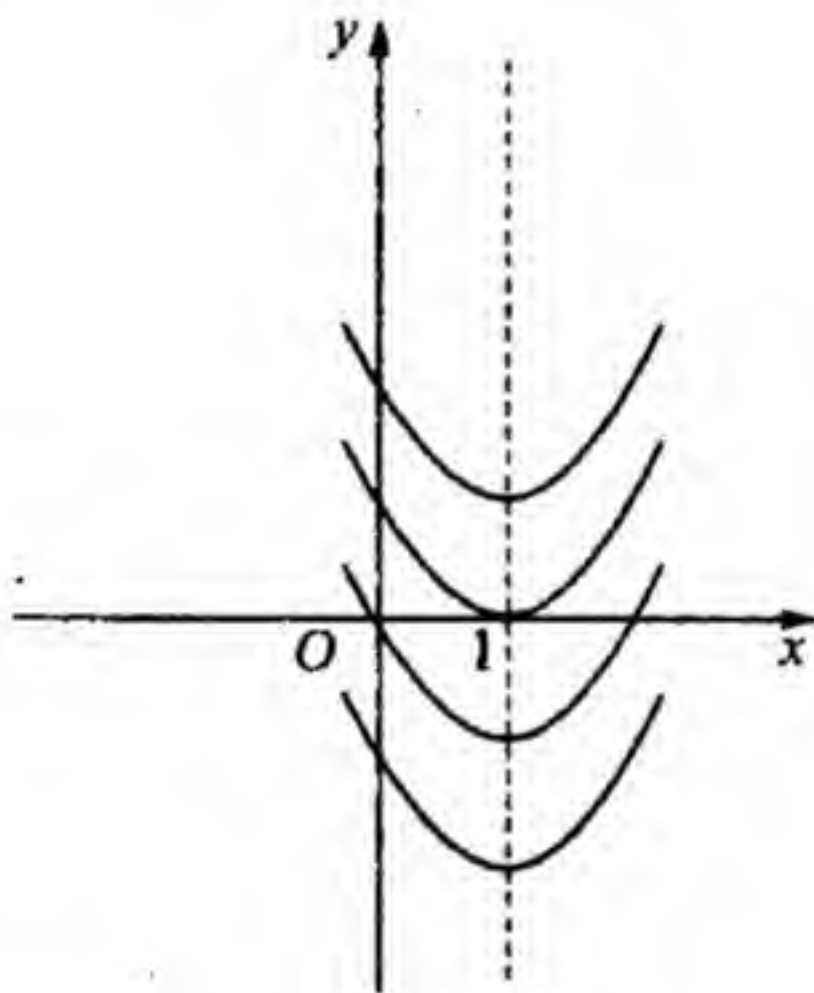
则 $f'(\varphi) = 2\sin\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{1-4\cos\varphi}} - 1\right)$,

当 $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ 时, $\sqrt{1-4\cos\varphi} > 1$.

从而 $f'(\varphi) < 0$,

故 $f(\varphi) < f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,

所以 $r'_\varphi < 0$, 即 r 随 φ 的增加而单调下降, 且当 $\varphi = \pi$ 时达到极小值.



1551 题图

$$r = \frac{1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.61,$$

如 1550 题图所示.

作出下列曲线族的图形(a 为可变参数)(1551 ~ 1555).

【1551】 $y = x^2 - 2x + a$.

解 将方程变形为

$$y - (a-1) = (x-1)^2,$$

这是以 $(1, a-1)$ 为顶点.

$x = 1$ 为对称轴, 开口向上的抛物线族, 如 1551 题图所示.

【1552】 $y = x + \frac{a^2}{x}$.

解 当 $a = 0$ 时为直线 $y = x$.

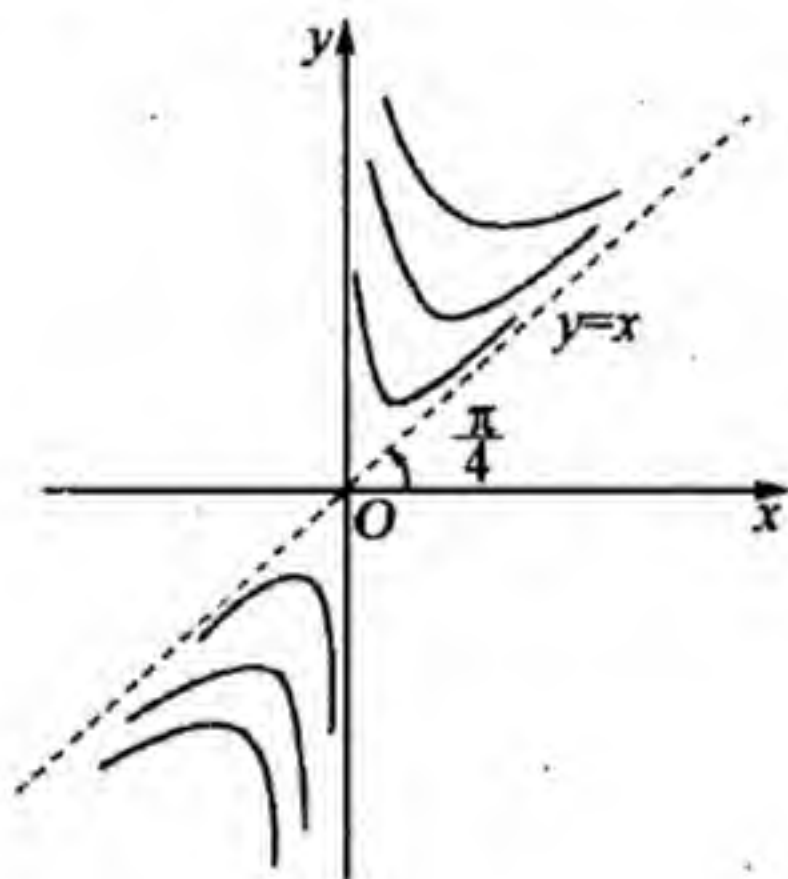
当 $a \neq 0$ 时, 为双曲线族, 其图形可由 $y = x$ 和 $y = \frac{a^2}{x}$ 相加而成, 它们以 $y = x$ 及 $x = 0$ 为渐近线. 而

$$y' = 1 - \frac{a^2}{x^2},$$

所以, 当 $x = |a|$ 时, 有极小值 $y = 2|a|$.

当 $x = -|a|$ 时, 有极大值 $y = -2|a|$.

如 1552 题图所示.



1552 题图

【1553】 $y = x \pm \sqrt{a(1-x^2)}$.

解 $y - x = \pm \sqrt{a(1-x^2)}$,

即 $(y-x)^2 + ax^2 = a$.

作仿射变换 $u = -x + y, v = x$.

则方程变为 $u^2 + av^2 = a$,

当 $0 < a < +\infty$ 时, 为椭圆族;

当 $-\infty < a < 0$ 时, 为双曲线族;

当 $a = 0$ 时, 为直线 $y = x$.

显然全曲线族通过点 $(-1, -1)$ 及 $(1, 1)$ (图形略).

【1554】 $y = \frac{x}{2} + e^{-ax}$.

解 原方程可变形为 $y - \frac{x}{2} = e^{-ax}$, 作仿射变换 $u = y - \frac{x}{2}$, $v = x$, 则方程化为 $u = e^{-av}$.

当 $a \neq 0$ 时, 表示一指数曲线族. 当 $a = 0$ 时, 表示直线 $y = \frac{x}{2} + 1$. 全曲线族通过点 $(0, 1)$. 显然 $y = \frac{x}{2}$ 为曲线族的渐近线.

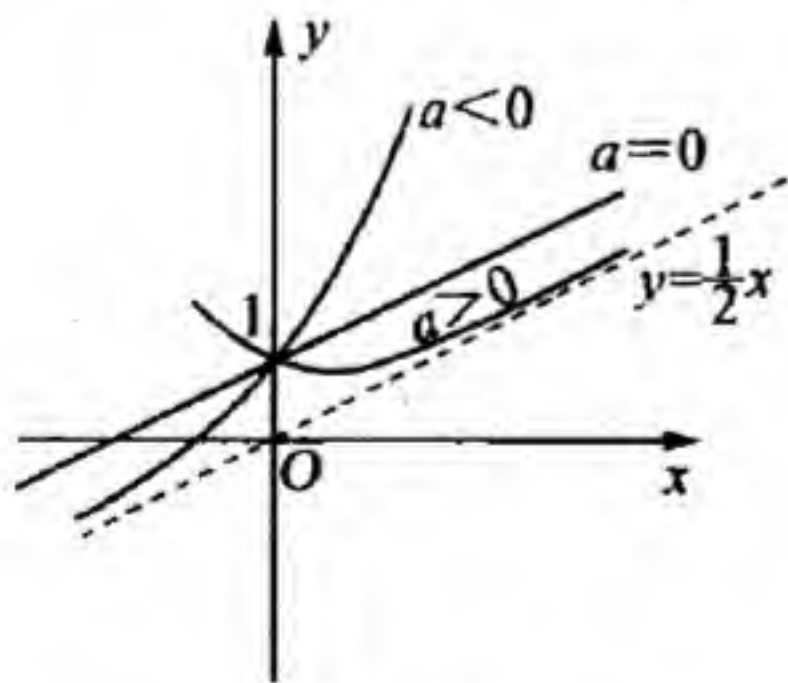
$$y' = \frac{1}{2} - ae^{-ax}.$$

令 $y' = 0$ 得, $x = \frac{1}{a} \ln(2a)$.

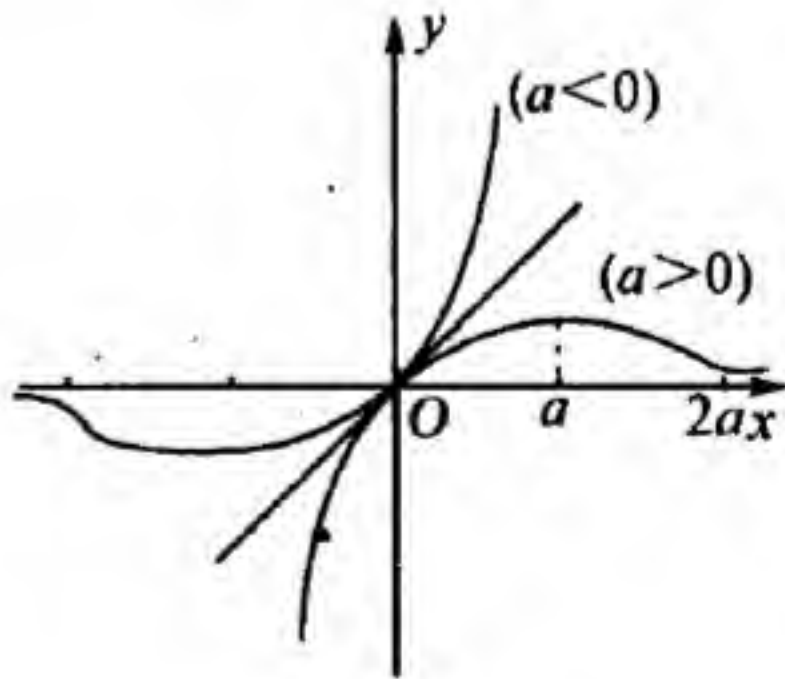
若 $a > 0$, 则当 $0 < x < \frac{1}{a} \ln(2a)$ 时, $y' > 0$. 当 $x > \frac{1}{a} \ln(2a)$ 时, $y' < 0$. 故当 $x = \frac{1}{a} \ln(2a)$ 时有极小值

$$y = \frac{1}{2a}(1 + \ln 2a).$$

若 $a \leq 0$, 则 $y' > 0$. 故函数增大 $y'' = a^2 e^{-ax} > 0$. 故曲线是凹的, 如 1554 题图所示.



1554 题图



1555 题图

【1555】 $y = xe^{-\frac{x}{a}}$.

解 显然, 全曲线族通过原点.

当 $a > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\frac{x}{a}} = 0$.

当 $a < 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-\frac{x}{a}} = 0$.

故 $y = 0$ 为曲线的渐近线.

$$y' = e^{-\frac{x}{a}} \left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

令 $y' = 0$ 得 $x = a$,

$$y'' = e^{-\frac{x}{a}} \left(\frac{x}{a^2} - \frac{2}{a}\right).$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 2a$,

$$y''|_{x=a} = -\frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}}.$$

故若 $a > 0$, 在 $x = a$ 处有极大值 $y = a e^{-1}$, 若 $a < 0$, 在 $x = a$ 处有极小值 $y = a e^{-1}$, 拐点 $x = 2a$, $y = 2a e^{-2} \approx 0.27a$. $y''|_{x=0} = 1$, 故曲线族在 origin 与直线 $y = x$ 相切如 1555 题图所示.

§ 13. 函数的极大值与极小值问题

【1556】 证明: 如果 $f(x)$ 是非负函数, 则函数

$$F(x) = C f^2(x) \quad (C > 0)$$

与函数 $f(x)$ 有相同的极值点.

证 设 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点, 则存在 x_0 的一个邻域 $N_\delta(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$, 使得当 $x \in N_\delta(x_0)$, 且 $x \neq x_0$ 时 $f(x_0) > f(x)$.

由于 $C > 0$ 及 $f(x) \geq 0$, 则有

$$C f^2(x_0) > C f(x_0) f(x) \geq C f(x)^2.$$

即 $F(x_0) > F(x)$. 所以 x_0 是 $F(x)$ 的极大值点. 反之, 若 x_0 是 $F(x)$ 的极大值点, 则存在 x_0 的一个邻域 $N_\delta(x_0)$ 使得当 $x \in N_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ 时, $F(x_0) > F(x)$, 即 $C f^2(x_0) > C f^2(x)$. 由于 $C > 0$ 及 $f(x) \geq 0$ 有

$$f(x_0) = |f(x_0)| > |f(x)| = f(x).$$

即 $f(x_0) > f(x)$. 这就证明了 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点. 因此, $f(x)$ 与 $F(x)$ 有相同的极大值点, 同样可证, $f(x)$ 与 $F(x)$ 有相同的极小值点.

【1557】 证明: 如果 $-\infty < x < +\infty$ 时函数 $\varphi(x)$ 在严格单调递增, 则函数 $f(x)$ 与 $\varphi(f(x))$ 有相同的极值点.

证 设 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点, 则存在 x_0 的一个邻域 $N_\delta(x_0)$, 使得当 $x \in N_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ 时

$$f(x_0) > f(x). \quad \textcircled{1}$$

由于 $\varphi(x)$ 是严格单调增加的, 故

$$\varphi(f(x_0)) > \varphi(f(x)) \quad (x \in N_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}). \quad \textcircled{2}$$

即 x_0 是 $\varphi(f(x))$ 的极大值点. 反之, 若 x_0 是 $\varphi(f(x))$ 的极大值点, 则 ② 式成立. 由 $\varphi(x)$ 的严格单调性知 ① 也成立, 即 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点. 因此, $f(x)$ 与 $\varphi(f(x))$ 有相同的极大值点. 同样可证, $f(x)$ 与 $\varphi(f(x))$ 有相同的极小值点. 证毕.

【1558】 两个正数之和是常数 a , 求这两个正数的 m 次幂与 n 次幂 ($m > 0, n > 0$) 乘积的极大值.

解 设一正数为 x , 则另一正数为 $a - x$ ($0 < x < a$), 所以, 我们要求

$$f(x) = x^m(a-x)^n \quad (0 < x < a),$$

的极大值. 由于

$$f'(x) = x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma - (m+n)x].$$

令 $f'(x) = 0$ 得

$$x = \frac{ma}{m+n} \quad (0 < x < a).$$

$$\text{当 } 0 < x < \frac{ma}{m+n} \text{ 时, } f'(x) > 0.$$

$$\text{当 } \frac{ma}{m+n} < x < a \text{ 时, } f'(x) < 0.$$

因此当 $x = \frac{ma}{m+n}$ 时, $f(x)$ 有极大值

$$f\left(\frac{ma}{m+n}\right) = \frac{a^{m+n}m^mn^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

【1559】 两个正数的乘积是常数 a , 求这两个正数的 m 次幂与 n 次幂 ($m > 0, n > 0$) 之和的极小值.

解 设一正数 x , 则另一正数为 $\frac{a}{x}$ ($0 < x < +\infty$), 根据题意, 要求函数

$$f(x) = x^m + \left(\frac{a}{x}\right)^n \quad (0 < x < +\infty),$$

的极小值. 由于

$$f'(x) = \frac{mx^{m+n} - na^n}{x^{n+1}}.$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{n}{m+n}}$. 显然

当 $0 < x < \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{n}{m+n}}$ 时, $f'(x) < 0$.

当 $\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{n}{m+n}} < x < +\infty$ 时, $f'(x) > 0$.

因此, 当 $x = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{n}{m+n}}$ 时, 函数 $f(x)$ 有极小值.

$$f\left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{n}{m+n}}\right] = (m+n) \left(\frac{a^m}{m^m n^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}.$$

【1560】 在什么样的对数系中存在着等于对数本身的数?

解 设所求数为 a , 则 $0 < a < +\infty, a \neq 1$, 问题即为 a 为怎样的表, 才能存在数 $x > 0$, 使

$$\log_a x = x,$$

设 $f(x) = x - \log_a x$.

则 $f'(x) = \frac{x \ln a - 1}{x \ln a}.$

当 $0 < a < 1$ 时,

$$f'(x) > 0 \quad (0 < x < +\infty),$$

即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 是严格单调增加, 而

$$f(a) = a - 1 < 0,$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} + 1 > 0,$$

因此存在唯一的 $x_0 \in \left(a, \frac{1}{a}\right)$ 使得 $f(x_0) = 0$, 即 $\log_a x_0 = x_0$.

当 $1 < a < +\infty$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{\ln a}$. 经判别知当 $x = \frac{1}{\ln a}$ 时, $f(x)$ 取到最小值

$$f\left(\frac{1}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a} - \log_a \left(\frac{1}{\ln a}\right),$$

若 $f\left(\frac{1}{\ln a}\right) > 0$ 知, 不存在 x 使得 $f(x) = 0$. 而

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln a} - \log_a \left(\frac{1}{\ln a}\right) &= \log_a e + \log_a (\ln a) \\ &= \log_a (e \ln a), \end{aligned}$$

所以当 $e \ln a > 1$. 即 $a > e^{\frac{1}{e}}$ 时不存在 x 使 $\log_a x = x$.

若 $e \ln a = 1$. 即 $a = e^{\frac{1}{e}}$, 则 $f\left(\frac{1}{e}\right) = 0$, 即 $\frac{1}{e} = \log_a \frac{1}{e}$.

若 $e \ln a < 1$. 即 $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ 时, $f\left(\frac{1}{\ln a}\right) < 0$. 而

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

知存在 $x_1 \in \left(0, \frac{1}{\ln a}\right)$ 及 $x_2 \in \left(\frac{1}{\ln a}, +\infty\right)$, 使得

$$f(x_1) = 0, f(x_2) = 0,$$

亦即 $x_1 = \log_a x_1, x_2 = \log_a x_2$.

综上所述, 当 $0 < a < e^{\frac{1}{e}}$, 且 $a \neq 1$ 时, 存在 $x > 0$, 使得 $x = \log_a x$.

【1561】 从面积为 S 的所有矩形中, 求出周长是最小的矩形.

解 设矩形的一条边长为 x , 则另一条边长为 $\frac{S}{x}$, 则其周长

为 $f(x) = 2\left(x + \frac{S}{x}\right)$,

而 $f'(x) = 2\left(1 - \frac{S}{x^2}\right)$,

由 $f'(x) = 0$ 得 $x = \sqrt{S}$, 当 $0 < x < \sqrt{S}$, $f'(x) < 0$. 当 $\sqrt{S} < x < +\infty$ 时, $f'(x) > 0$.

故 $f(\sqrt{S})$ 为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的最小值.

因此, 所求矩形为以 \sqrt{S} 为边的正方形.

【1562】 如果直角三角形的一条直角边与斜边的和是常数, 求面积最大的直角三角形.

解 设一条直角边为 x , 则根据题设另一条直角边为

$$\sqrt{(a-x)^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - 2ax},$$

其中 a 为定常数, $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$. 故直角三角形的面积为

$$S(x) = \frac{1}{2}x \sqrt{a^2 - 2ax}.$$

则
$$S'(x) = \frac{a^2 - 3ax}{2\sqrt{a^2 - 2ax}}.$$

令 $S'(x) = 0$ 得 $x = \frac{a}{3}$.

当 $0 < x < \frac{a}{3}$, $S'(x) > 0$.

当 $\frac{a}{3} < x < \frac{a}{2}$ 时, $S'(x) < 0$.

故 $S\left(\frac{a}{3}\right)$ 为 $S(x)$ 在 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ 内的最大值. 此时, 斜边长为 $a -$

$\frac{a}{3} = \frac{2a}{3}$, 它是一直角边的两倍, 故此直角三角形的两锐角分别为 30° 及 60° .

【1563】 在怎样的尺度下, 容积为 V 的圆柱形封闭罐的总表面积是最小的?

解 设底面半径为 x , 则高为 $h = \frac{V}{\pi x^2}$. 故圆柱的表面积为

$$S(x) = 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2} + 2\pi x^2 = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x},$$

而
$$S'(x) = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2},$$

令 $S'(x) = 0$ 得 $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$

当 $0 < x < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时, $S'(x) < 0.$

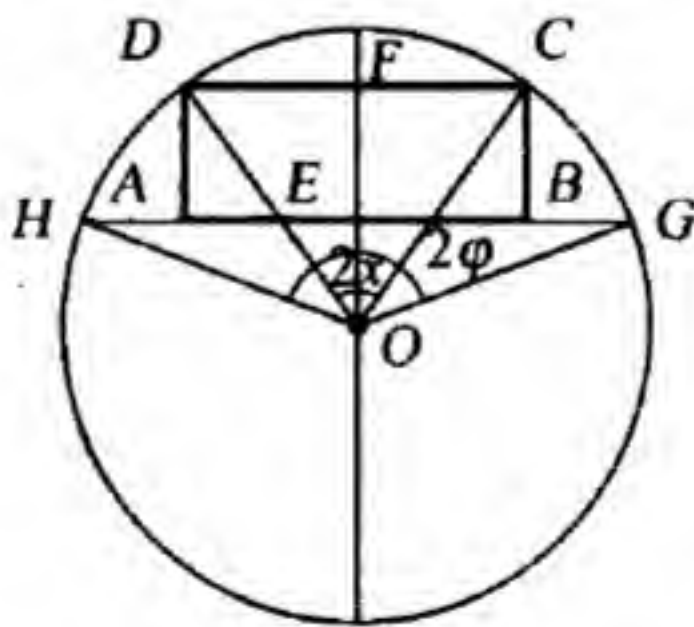
当 $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} < x < +\infty$ 时, $S'(x) > 0.$

故 $S\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = \sqrt[3]{54\pi V^2}$ 为 $S(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的最小值. 因

此当底面半径为 $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, 高为 $\frac{V}{2\pi x^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时有最小面积 $\sqrt[3]{54\pi V^2}.$

【1564】 在不超过半圆的已知弓形内嵌入面积最大的矩形.

解 如 1564 题图所示, 不妨设圆的半径为单位长度. 弓形所对的圆心角为 2φ (常数), 所嵌入的矩形 $ABCD$ 所确定的弧 \widehat{CD} . \widehat{CD} 所对应的圆心角为 $2x$, 即



1564 题图

$$\angle HOG = 2\varphi, \angle COD = 2x.$$

则 $OE = \cos\varphi, FC = \sin x,$

$$EF = \cos x - \cos \varphi.$$

从而矩形面积为

$$\begin{aligned} S(x) &= 2FC \cdot EF \\ &= 2\sin x (\cos x - \cos \varphi) \\ &= \sin 2x - 2\sin x \cos \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad S'(x) &= 2\cos 2x - 2\cos x \cdot \cos \varphi \\ &= 4\cos^2 x - 2\cos x \cdot \cos \varphi - 2. \end{aligned}$$

令 $S'(x) = 0$, 并注意到 $\cos x \geq 0$ 得

$$\cos x = \frac{\cos \varphi + \sqrt{\cos^2 \varphi + 8}}{4}.$$

$$\text{由于} \quad x \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

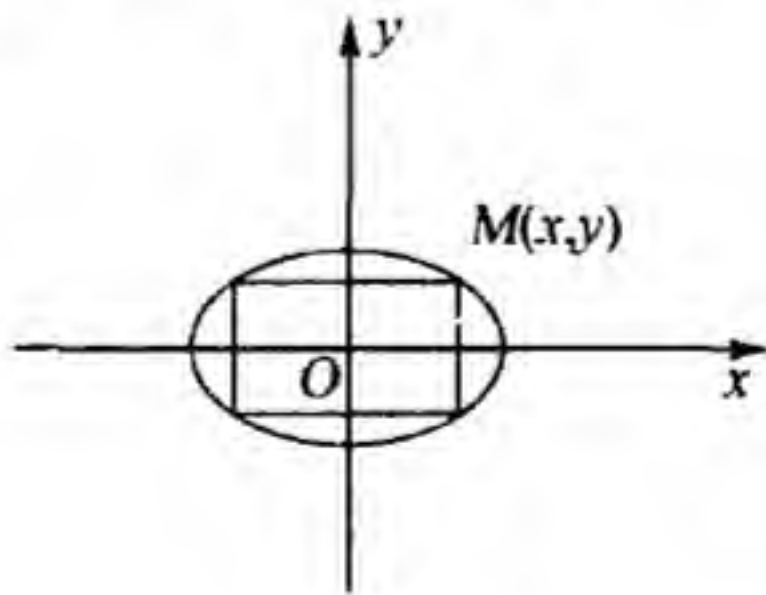
$$\text{故} \quad \cos \varphi \leq \cos x.$$

$$\begin{aligned} \text{于是有} \quad S''(x) &= -4\sin 2x + 2\sin x \cos \varphi \\ &\leq -4\sin 2x + 2\sin x \cos x \\ &= -3\sin 2x < 0, \end{aligned}$$

这说明当 $x = \arccos \frac{\cos \varphi + \sqrt{\cos^2 \varphi + 8}}{4}$ 时, $S(x)$ 达到极大值. 由于只有一个极大值, 所以它也是 $0 \leq x \leq \varphi$ 内的最大值.

【1565】 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中嵌入边长平行于椭圆轴的面积最大的矩形.

解 如 1565 题所示设椭圆方程为



1565 题图

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

设 $M(x, y)$ 为矩形的在第一象限的顶点. 因为 $M(x, y)$ 在椭圆. 故须满足椭圆方程. 因此

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

所以矩形面积为

$$S(x) = 4 \frac{b}{a} \cdot x \sqrt{a^2 - x^2} \quad (0 \leq x \leq a),$$

$$S'(x) = 4 \frac{b}{a} \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

令 $S'(x) = 0$ 得 $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

当 $0 \leq x < \frac{a}{\sqrt{2}}$ 时 $S'(x) > 0$.

当 $\frac{a}{\sqrt{2}} < x < a$ 时, $S'(x) < 0$.

故当 $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 时, $S(x)$ 取 $[0, a]$ 上的最大值 $S\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = 2ab$.

即当矩形的边长分别为 $\sqrt{2}a$ 和 $\sqrt{2}b$ 时, 矩形面积为最大, 最大面积为 $2ab$.

【1566】 在底边为 b , 高为 h 的三角形中, 嵌入周长最大的矩形. 研究此问题有解的可能性.

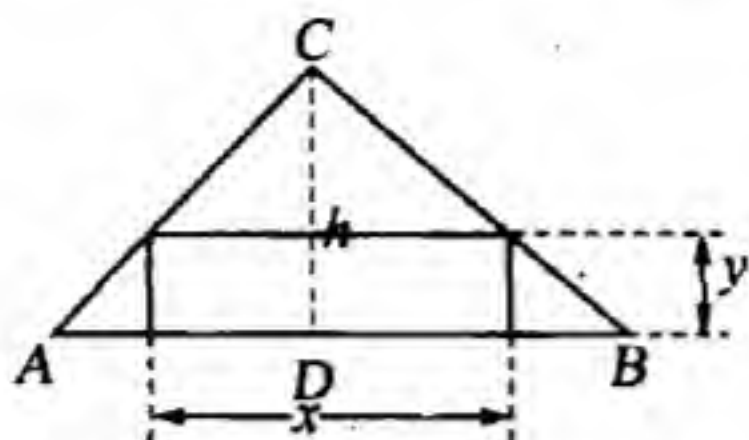
解 如 1566 题图所示 $AB = b, CD = h$, 设嵌入矩形的边长分别为 x, y . 如图所示, 则

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h},$$

故 $x = \frac{b}{h}(h-y)$.

矩形的周长为

$$p(y) = 2\left[y + \frac{b}{h}(h-y)\right]$$



1566 题图

$$= 2 \left[\left(1 - \frac{b}{h} \right) y + b \right],$$

显然, 当 $h = b$ 时, 周长 $p = 2b$ 为一定值. 当 $h > b$ 时,

$$p'(y) = 2 \left(1 - \frac{b}{h} \right) > 0,$$

所以, p 单调增加, 故当 $y = h$ 时, 有边界极大值 $p = 2h$, 但此时 $x = 0$, 所嵌入的矩形不允许边长为 0. 故此时嵌入的矩形有最大周长者是不存在的, 即问题无解. 同样, 当 $h < b$ 时, 问题无解.

【1567】 用直径为 d 的圆木切出矩形横断面的梁, 此矩形的底为 b , 高为 h , 如果梁的强度同 bh^2 成正比, 最大强度的梁的尺寸应是多少?

解 由于 $b^2 + h^2 = d^2$,

故 $h^2 = d^2 - b^2$,

从而知要求

$$f(b) = b(d^2 - b^2),$$

何时取最大值. 由于 $f'(b) = d^2 - 3b^2$,

由 $f'(b) = 0$ 得 $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$

当 $0 < b < \frac{d}{\sqrt{3}}$ 时, $f'(d) > 0$.

当 $\frac{d}{\sqrt{3}} < b < d$ 时, $f'(d) < 0$.

从而知 $f\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)$ 为 $f(b)$ 在 $(0, d)$ 内的最大值. 此时 $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$. 即所

求矩形的底为 $\frac{d}{\sqrt{3}}$,高为 $d\sqrt{\frac{2}{3}}$.

【1568】 在半径为 R 的半球内,嵌入体积最大的以正方形为底的长方体.

解 设六面体的底面边长为 $2x$,高为 $2y$,则有

$$2x^2 + y^2 = R^2 \quad \left(0 < x < \frac{R}{\sqrt{2}}\right),$$

从而 $y = \sqrt{R^2 - 2x^2}$.

六面体的体积为

$$V(x) = (2x)^2 \cdot 2y = 8x^2 \sqrt{R^2 - 2x^2},$$

$$V'(x) = \frac{16x(R^2 - 3x^2)}{\sqrt{R^2 - 2x^2}}.$$

令 $V'(x) = 0$ 得 $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$, $x = 0$ (舍去).

当 $0 < x < \frac{R}{\sqrt{3}}$ 时, $V'(x) > 0$.

当 $\frac{R}{\sqrt{3}} < x < \frac{R}{\sqrt{2}}$ 时, $V'(x) < 0$.

所以 $V\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$ 为最大值,此时 $y = \frac{R}{\sqrt{3}}$.即当六面体为正方体时,体积

最大,最大体积为 $V\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}}$.

【1569】 在半径为 R 的球体内嵌入体积最大的圆柱.

解 设圆柱的底面半径为 r ,高为 $2h$,则有

$$r^2 + h^2 = R^2 \quad (0 \leq r \leq R),$$

即 $h = \sqrt{R^2 - r^2}$.

故圆柱的体积为

$$V(r) = \pi r^2 \cdot (2h) = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2},$$

$$V'(r) = \frac{2\pi r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

令 $V'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$ 及 $r = 0$ (舍去).

当 $0 \leq r < \sqrt{\frac{2}{3}}R$ 时, $V'(r) > 0$.

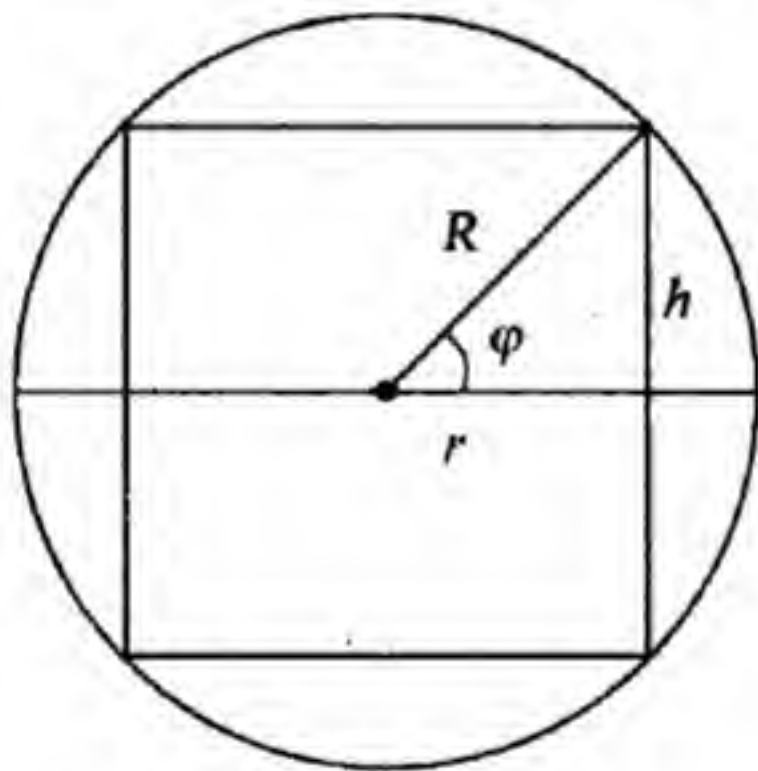
当 $\sqrt{\frac{2}{3}}R < r < R$ 时, $V'(r) < 0$.

所以 $V(\sqrt{\frac{2}{3}}R)$ 为 $V(r)$ 在 $[0, R]$ 的最大值. 此时 $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$, 且

$$V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

【1570】 在半径为 R 的球体内嵌入表面积最大的圆柱.

解 如 1570 题图所示设圆柱底半径为 r , 高为 $2h$. 则有



1570 题图

$$r = R\cos\varphi, h = R \cdot \sin\varphi.$$

从而圆柱的表面积为

$$\begin{aligned} S &= 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot (2h) \\ &= 2\pi R^2 \cos^2\varphi + 4\pi R^2 \sin\varphi \cos\varphi \\ &= \pi R^2 (1 + \cos 2\varphi) + 2\pi R^2 \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

则
$$\frac{dS}{d\varphi} = -2\pi R^2 \sin 2\varphi + 4\pi R^2 \cos 2\varphi,$$

令 $\frac{dS}{d\varphi} = 0$ 得 $\tan 2\varphi = 2$, 其解为

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \arctan 2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

于是 $\sin 2\varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos 2\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{5}},$

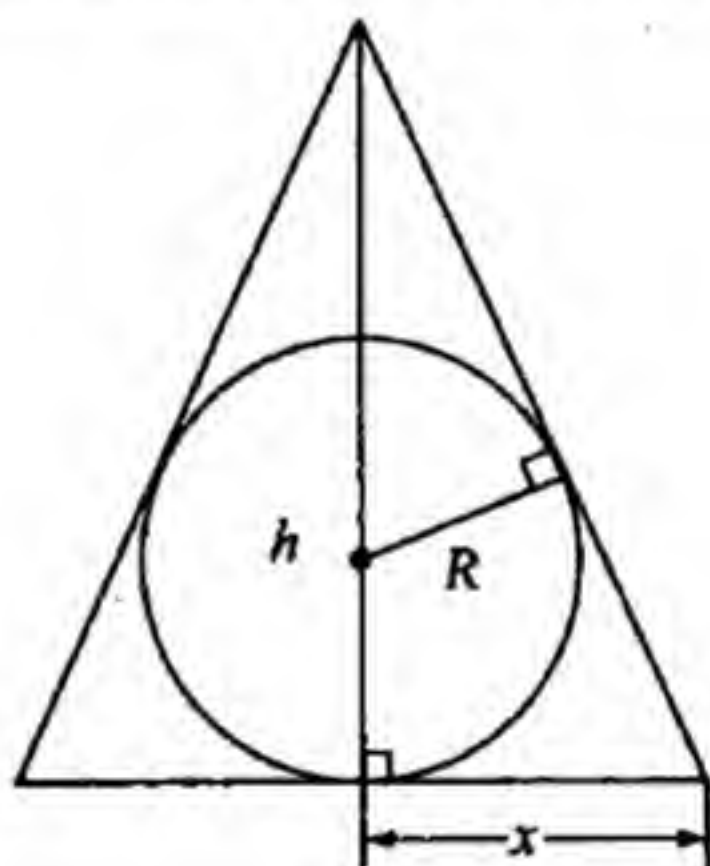
而 $\left. \frac{d^2 S}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} = -4\pi R^2 [2\sin 2\varphi_0 + \cos 2\varphi_0] = -4\sqrt{5}\pi R^2 < 0,$

故当 $\varphi = \varphi_0$ 时, 表面积最大, 最大表面积为

$$S = \pi R^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi R^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \pi R^2 (1 + \sqrt{5}).$$

【1571】 对已知球作体积最小的外切圆锥.

解 设外切圆锥的底面半径为 x , 高为 h , 则



1571 题图

$$\frac{x}{R} = \frac{h}{\sqrt{(h-R)^2 - R^2}},$$

解之得 $h = \frac{2Rx^2}{x^2 - R^2}.$

于是外切圆锥体的体积为

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 \cdot h = \frac{2\pi R}{3} \cdot \frac{x^4}{x^2 - R^2} \quad (x > R),$$

$$V'_x = \frac{4\pi R}{3} \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2}.$$

令 $V'_x = 0$, 得 $x = \sqrt{2}R$, 其他根不合要求, 故舍去.

当 $R < x < \sqrt{2}R$ 时, $V'_x < 0$.

当 $\sqrt{2}R < x < +\infty$ 时, $V'_x > 0$.

故当 $x = \sqrt{2}R$ 时, V 有最小值

$$V(\sqrt{2}R) = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3,$$

所以, 外切圆锥的最小体积为球体体积的两倍.

【1572】 求出母线为 l 的圆锥的最大体积.

解 设圆锥的底面半径为 x , 高为 h , 则

$$h = \sqrt{l^2 - x^2}.$$

故圆锥的体积为

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{l^2 - x^2} \quad (0 < x < l),$$

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi \frac{x(2l^2 - 3x^2)}{\sqrt{l^2 - x^2}}.$$

令 $V'(x) = 0$ 得 $x = \sqrt{\frac{2}{3}}l$.

经判别知 $V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 为最大值.

因此, 所求圆锥的底面半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$, 最大体积为

$$V\left(\frac{2}{3}l\right) = \frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}.$$

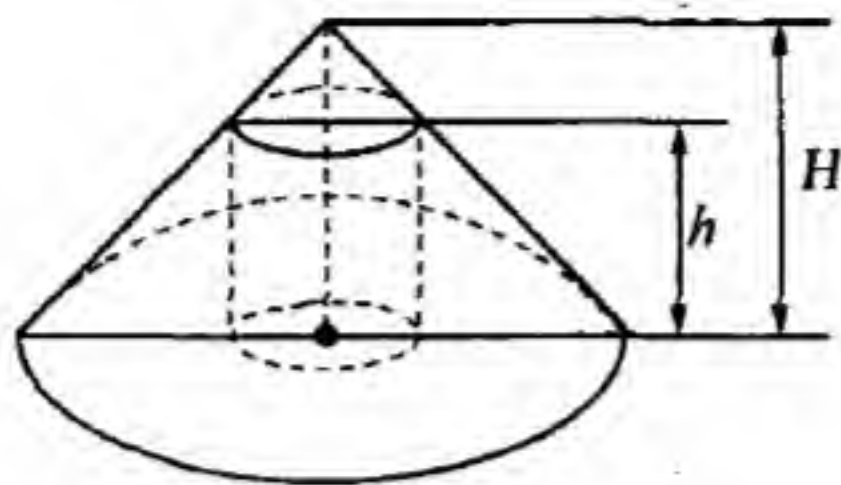
【1573】 在顶角为 2α 且底半径为 R 的直圆锥内, 嵌入表面积最大的圆柱.

解 设 x 为圆的底面半径, h 为圆柱的高, H 为圆锥的高(如 1573 题图所示), 则

$$\frac{h}{H} = \frac{R-x}{R},$$

故 $h = \frac{R-x}{R}H,$

其中 $H = R\cot\alpha$ 为常数.



1573 题图

故圆柱的表面积为

$$\begin{aligned} S(x) &= 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot h \\ &= 2\pi \left[x^2 + x \left(1 - \frac{x}{R} \right) H \right] \quad (0 \leq x \leq R). \end{aligned}$$

于是 $S'(x) = 2\pi \left(2x + H - \frac{2x}{R} H \right).$

令 $S'(x) = 0$ 解得

$$x = \frac{RH}{2(H-R)},$$

此值应在 0 与 R 之间, 故有 $R < H$. 且

$$\tan \alpha = \frac{R}{H} < \frac{1}{2},$$

显然, 此时当

$$x = \frac{RH}{2(H-R)} = \frac{R}{2(1-\tan \alpha)}$$

时, $S(x)$ 有最大值.

【1574】 求出点 $M(p, p)$ 到抛物线 $y^2 = 2px$ 的最短距离.

解 只要考虑函数

$$\begin{aligned} f(y) &= (x-p)^2 + (y-p)^2 \\ &= x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2py + p^2 \\ &= x^2 + 2p^2 - 2py \\ &= \frac{y^4}{4p^2} - 2py + 2p^2, \end{aligned}$$

的极值即可.

$$f'(y) = \frac{y^3 - 2p^3}{p^2}.$$

令 $f'(y) = 0$ 得 $y = \sqrt[3]{2}p$.

经讨论知 $f(\sqrt[3]{2}p)$ 为最小值. 因此, 最短距离为

$$\begin{aligned}\sqrt{f(\sqrt[3]{2}p)} &= \sqrt{\frac{2^{\frac{4}{3}}p^4}{4p^2} + 2p^2 + 2\sqrt[3]{2}p^2} \\ &= p\sqrt{\frac{\sqrt[3]{2}}{2} + 2 - 2\sqrt[3]{2}}.\end{aligned}$$

【1575】 求出点 $A(2,0)$ 至圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的最短和最长距离.

解 显然, 最短距离为 1, 最长距离为 3. 事实上, 求

$$f(x) = (x-2)^2 + y^2 = 5 - 4x.$$

在 $[-1, 1]$ 上的最大值与最小值. 由于 $f(x)$ 为线性函数, 故最大值, 最小值只能在边界上取到, 显然 $f(-1) = 9$ 为最大值, $f(1) = 1$ 为最小值. 故最长距离为 $\sqrt{f(-1)} = 3$, 最短距离为 $\sqrt{f(1)} = 1$.

【1576】 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < a$) 经过顶点 $(0, -b)$ 的最大弦.

解 我们首先求下面函数的极值

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 + (y+b)^2 = x^2 + y^2 + 2by + b^2 \\ &= \left(a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2\right) + y^2 + 2by + b^2 \\ &= \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)y^2 + 2by + a^2 + b^2.\end{aligned}$$

则 $f'(y) = 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)y + 2b$.

令 $f'(y) = 0$ 得

$$y = \frac{b^3}{a^2 - b^2} = \frac{b^3}{c^2} \quad (c = \sqrt{a^2 - b^2}).$$

要使 $y = \frac{b^3}{c^2}$ 为椭圆上点的纵坐标必须 $\frac{b^3}{c^2} \leq b$, 即 $b^2 \leq c^2$. 亦即 $b \leq$

$\frac{a}{\sqrt{2}}$. 经判别知当 $y = \frac{b^3}{c^2}$ ($b \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$) 时, $f(y)$ 取最大值

$$f\left(\frac{b^3}{c^2}\right) = \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \frac{b^6}{c^4} + 2b \frac{b^3}{c^2} + a^2 + b^2 = \frac{a^4}{c^2},$$

此时 $x = \pm \frac{a^2}{c^2} \sqrt{a^2 - 2b^2}$,

因此,最大弦为

$$\sqrt{f\left(\frac{b^3}{c^2}\right)} = \frac{a^2}{c},$$

弦的一端为 $(0, b)$, 另一端为 $\left(\pm \frac{a^2}{c^2} \sqrt{a^2 - 2b^2}, \frac{b^3}{c^2}\right)$.

若 $b > \frac{a}{\sqrt{2}}$, 则当 $-b \leq y \leq b$ 时,

$$\begin{aligned} f'(y) &= 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)y + 2b > 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)(-b) + 2b \\ &= \frac{2a^2}{b} > 0, \end{aligned}$$

故当 $y = b, x = 0$ 时, 取得弦长的边界最大值, 此时最大弦长为 $2b$.

【1577】 过椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

上的点 $M(x, y)$ 引出一条与坐标轴构成一个面积最小的三角形的切线.

解 切线斜率为 $k = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$, 于是切线方程为

$$Y - y = -\frac{b^2 x}{a^2 y}(X - x),$$

不失一般性, 设点 M 在第一象限. 于是切线在两坐标轴上的截距分别为 $\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}$. 因此, 所求三角形的面积为

$$S(x) = \frac{a^2 b^2}{2xy} = \frac{a^3 b}{2x \sqrt{a^2 - x^2}},$$

要求 $S(x)$ 在 $(0, a)$ 内的最小值点, 只须求出

$$f(x) = x^2 \cdot (a^2 - x^2),$$

在 $(0, a)$ 内的最大值点. 而

$$f'(x) = 2a^2x - 4x^3.$$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, 经讨论知 $f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 为 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内的最

大值. 此时 $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$. 因此在点 $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 所引的切线与坐标轴构

成的三角形面积为最小, 最小面积为

$$S\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{a^2 b^2}{2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{2}}} = ab.$$

【1578】 一物体是个直圆柱体, 其上端为半球形, 如果此物体的体积等于 V , 问在处怎样的尺寸下此物体的表面积是最小的?

解 设 x 为圆柱的底面半径, h 为圆柱的高, 则据题设有

$$V = \frac{2}{3}\pi x^3 + \pi x^2 \cdot h.$$

即
$$h = \frac{V}{\pi x^2} - \frac{2}{3}x.$$

故其表面积为

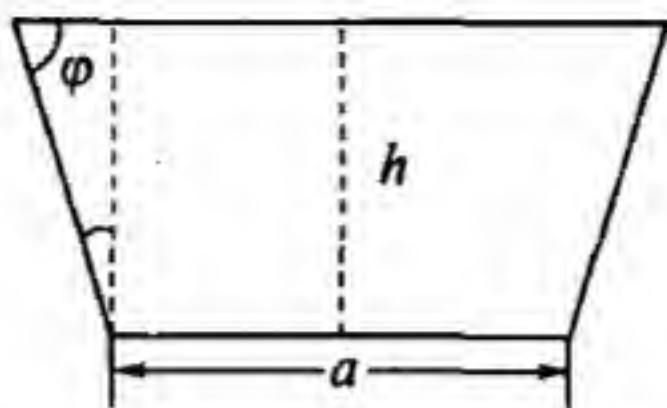
$$S(x) = 3\pi x^2 + 2\pi x \cdot \left(\frac{V}{\pi x^2} - \frac{2}{3}x\right) = \frac{5\pi}{3}x^2 + \frac{2V}{x},$$

$$S'(x) = \frac{10\pi}{3}x - \frac{2V}{x^2}.$$

令 $S'(x) = 0$, 得 $x = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$. 经讨论知 $S\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}\right)$ 为最小值, 此时 $h = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$, 即当 $x = h = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$ 时, 表面积最小.

【1579】 明渠的横断面为等腰梯形, 如果渠道中流水的横断面的面积等于 S , 水位等于 h . 渠道两侧的坡度 φ 是多少, 才能使断面被水浸湿的周长是最小的?

解 浸水周长为 $l = a + 2hcsc\varphi$
其中 a 为底边长. 又截面积为



1579 题图

$$S = \frac{1}{2}(2a + 2h\cot\varphi)h = ah + h^2\cot\varphi,$$

所以 $l = \frac{S}{h} = h\cot\varphi + 2h\csc\varphi,$

$$\frac{dl}{d\varphi} = \frac{h}{\sin^2\varphi} - 2h \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

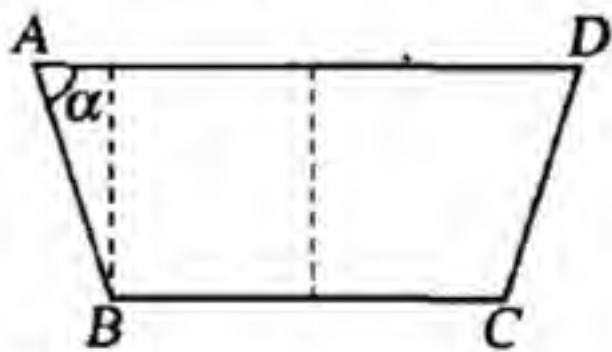
令 $\frac{dl}{d\varphi} = 0$ 得 $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$. 经讨论知, 当 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 时, l 有

最小值, 所以当 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 时, 横断面积被水浸周长为最小.

【1580】 假设封闭曲线所围的面积为 S 圆周也包围同样的面积 S , 则封闭曲线的周长与圆周长的比称为该曲线的“弯曲性”.

设等腰梯形 $ABCD$ ($AD \parallel BC$) 的底边 $AD = 2a$, 锐角 $BAD = \alpha$, 等腰梯形形状如何才会有最小的弯曲性?

解 设腰 $AB = CD = x$, 则梯形的周长为



$$l = 4a + 2x(1 - \cos\alpha).$$

梯形的面积为 $S = (2a - x\cos\alpha)x\sin\alpha.$

令 $S = \pi R^2$ 得 $R = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{(2a - x\cos\alpha)x\sin\alpha}.$

相应的圆周长为 $L = 2\pi R = 2\sqrt{\pi(2a - x\cos\alpha)x\sin\alpha},$

则弯曲性 k 为 $k = \frac{l}{L} = \frac{2a + x(1 - \cos\alpha)}{\sqrt{\pi(2a - x\cos\alpha)x\sin\alpha}},$

$$\frac{dk}{dx} = \frac{a \sin \alpha [x(1 + \cos \alpha) - 2a]}{\sqrt{\pi} [(2a - x \cos \alpha) x \sin \alpha]^{\frac{3}{2}}}.$$

令 $\frac{dk}{dx} = 0$ 得 $x = a \sec^2 \frac{\alpha}{2}$, 经讨论知此时 k 有最小值. 即当 $AB = CD = a \sec^2 \frac{\alpha}{2}$ 时, 梯形具有最小的弯曲性.

【1581】 从半径为 R 的圆中应切去怎样的扇形, 才能使剩余部分可卷成一个容积最大的漏斗?

解 设余下部分的中心角为 x , 则漏斗(圆锥)底面的周长为 Rx , 底面半径为 $\frac{Rx}{2\pi}$, 其高为

$$h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2} = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2},$$

则容积为

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{3} \pi \left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2} \\ &= \frac{R^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2} \quad (0 < x < 2\pi). \end{aligned}$$

为求 $V(x)$ 的最大值点, 我们只须求下面函数 $f(x)$ 的最大值点

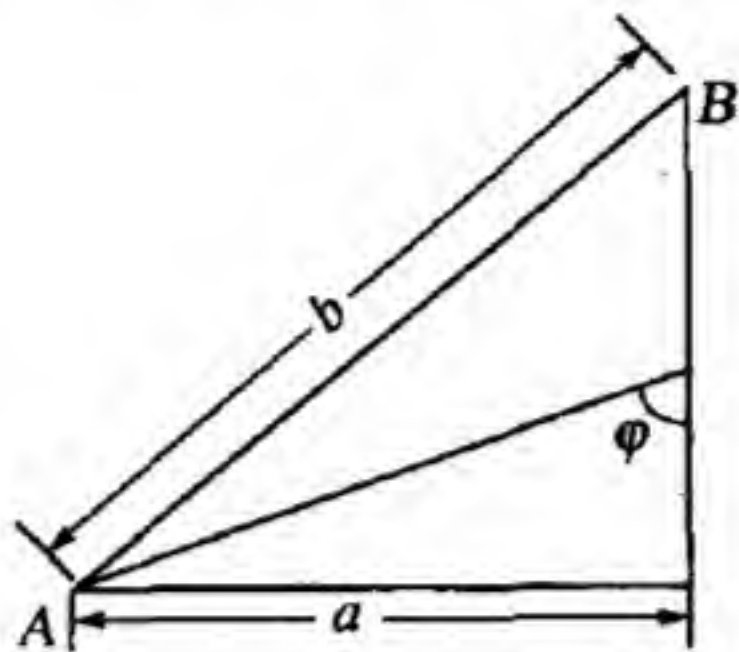
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2(4\pi^2 - x^2) \quad (0 < x < 2\pi), \\ f'(x) &= 16\pi^2 x^3 - 6x^5. \end{aligned}$$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. 经讨论知 $f\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 为最大值. 因此, 所割去扇形的中心角应为 $2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

【1582】 由南到北的铁路经过 B 城, 工厂 A 距此铁路的最短距离为 a 千米, 距北面的 B 城为 b 千米. 为了从 A 到 B 运输货物最经济, 从工厂建设一条专用线, 如果每吨货物沿专用线运输的价格为每千米 p 卢布, 而沿铁路为每千米 q 卢布 ($p > q$), 问专用线应该与铁路成怎样的角度 φ ?

解 所需运费为

$$F = (\sqrt{b^2 - a^2} - a \cot \varphi)q + \sqrt{a^2 + a^2 \cot^2 \varphi}p$$



1582 题图

$$= q \sqrt{b^2 - a^2} - aq \cot \varphi + ap \csc \varphi,$$

$$\frac{dF}{d\varphi} = \frac{aq}{\sin^2 \varphi} - \frac{ap \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

令 $\frac{dF}{d\varphi} = 0$ 得 $\varphi_0 = \arccos \frac{q}{p}$. 经讨论知 F 在 φ_0 取最小值.

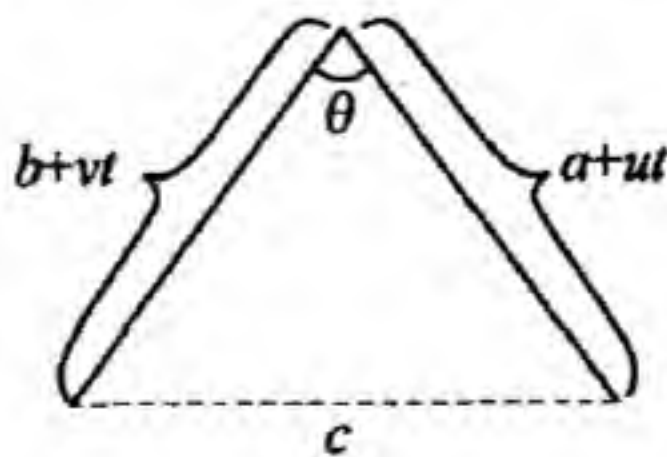
故当 $\arccos \frac{q}{p} \geq \arctan \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ 时, 取 $\varphi_0 = \arccos \frac{q}{p}$ 相应运费

最省; 当 $\arccos \frac{q}{p} < \arctan \frac{a}{b}$ 时, 则取 $\varphi_0 = \arctan \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}$, 即直

接建侧轨联接 A 与 B 时运费最省.

【1583】 两船各以固定的速度 u 和 v 沿直线航行, 彼此前进的方向成 θ 角, 如果在某时刻它们与其路线交点的距离分别等于 a 和 b , 求两船之间的最小距离.

解 设两船与路线交点分别为 a, b 时的时刻 $t_0 = 0$, 则时刻 t 时两船的距离 S 满足:



1583 题图

$$f(t) = S^2$$

$$= (a+ut)^2 + (b+vt)^2 - 2(a+ut)(b+vt)\cos\theta,$$

$$f'(t) = 2(a+ut) + 2(b+vt)v - 2(bu+av+2uvt)\cos\theta.$$

令 $f'(t) = 0$, 解得

$$t_1 = -\frac{au + bv - (av + bu)\cos\theta}{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}.$$

经讨论知, $f(t_1)$ 为最小值, 且

$$f(t_1) = \frac{[(av - bu)\sin\theta]^2}{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta},$$

因此, 最小距离为

$$S = \frac{|av - bu| \sin\theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}}.$$

又两船之间的最小距离也可在 $t_0 = 0$ 之前达到, 类以可求此时的最小距离为

$$S = \frac{|av + bu| \sin\theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2\arccos\theta}}$$

【1584】 在 A, B 二点处各有一光源, 其烛光强度分别为 S_1 和 S_2 , 在线段 $AB = a$ 上求出最小照明点 M .

解 设 $AM = x$, 则照度为

$$I = \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{(a-x)^2},$$

由
$$I'_x = -\frac{2S_1}{x^3} + \frac{2S_2}{(a-x)^3}.$$

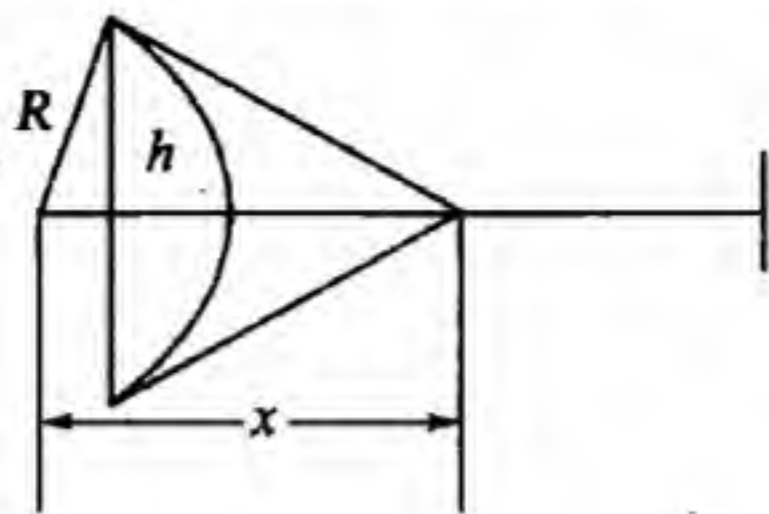
令 $I'_x = 0$ 得 $S_2 x^3 = S_1 (a-x).$

解之得
$$x = a \left(1 + \sqrt[3]{\frac{S_2}{S_1}} \right)^{-1},$$

经检验知 $I \left[a \left(1 + \sqrt[3]{\frac{S_2}{S_1}} \right)^{-1} \right]$ 为最小值.

【1585】 发光点位于半径为 R 和 r ($R > r$) 的两个互不相交的球的球心连线上, 而且位于两个球之外, 发光点在什么位置, 才能使两个球表面照明部分的和是最大的?

解 设发光点离大球中心之距离为 x , 两球中心之距离为 a . 则所照射到的大球球冠的高 h 满足



1585 题图

$$\frac{R-h}{R} = \frac{R}{x},$$

所以根据球冠面积公式知照明部分面积之和为

$$S(x) = 2\pi R \left(R - \frac{R^2}{x} \right) + 2\pi r \left(r - \frac{r^2}{a-x} \right) \quad (R < x \leq a-r),$$

$$\frac{dS}{dx} = 2\pi R^3 \cdot \frac{1}{x^2} - 2\pi r^3 \frac{1}{(a-x)^2}.$$

$$\text{令 } \frac{dS}{dx} = 0 \text{ 得 } x = \frac{a}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{又由 } x \leq a-r \text{ 可得 } \frac{R^{\frac{3}{2}}}{R^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{3}{2}}} a \leq a-r,$$

$$\text{即 } a \geq r + R\sqrt{\frac{R}{r}}.$$

$$\text{当 } a \geq r + R\sqrt{\frac{R}{r}}, \text{ 且 } x = \frac{a}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}} \text{ 时, 照明面积最大.}$$

当 $r + R < a < r + R\sqrt{\frac{R}{r}}$ 时, 显然当 $x = a - r$ 时, 照明面积最大.

【1586】 圆桌的半径为 a , 应该在圆桌中央上方的什么位置安装电灯, 才能使圆桌边沿上的亮度是最大的?

提示: 照明亮度用下式表示

$$I = k \frac{\sin \varphi}{r^2}.$$

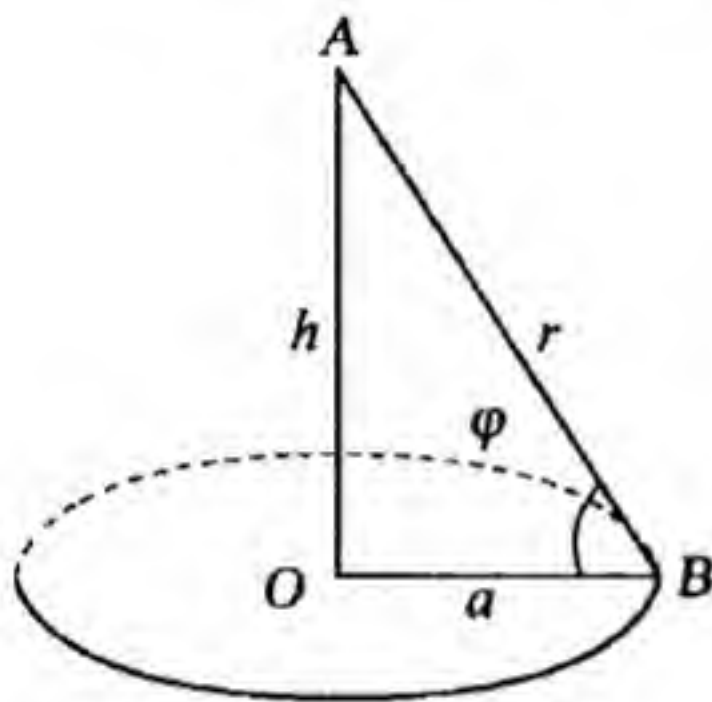
其中 φ 为灯光的倾角

r 为光源离被照面积的距离

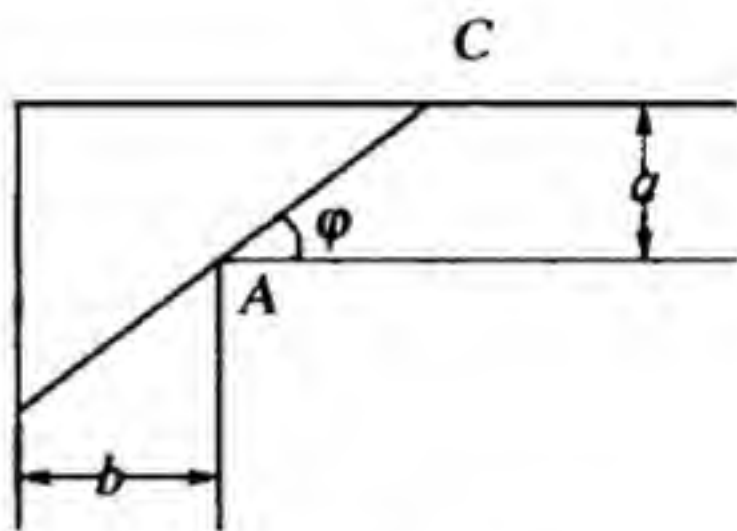
k 为光源强度

解 如 1586 题图所示. 由物理学知, 照明亮度 I 为

$$I = k \frac{\sin \varphi}{r^2} = k \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r^3}.$$



1586 题图



1587 题图

设 $f(r) = \frac{r^2 - a^2}{r^6} = \frac{1}{r^4} - \frac{a^2}{r^6} \quad (0 < r < +\infty),$

则 $f'(r) = -\frac{4}{r^5} + \frac{6a^2}{r^7}.$

设 $f'(r) = 0$, 解得 $r = \sqrt{\frac{3}{2}}a$, 经讨论知 $f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}a\right)$ 为最大, 此时

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{2} - a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

因此, 应在圆桌面中央上离桌面距离 $\frac{a}{\sqrt{2}}$ 的地方安装电灯, 才能使桌子边沿上的照度为最大.

【1587】 向宽为 a 米的河流修建一条宽为 b 米的运河, 两者成直角相交, 能驶进这条运河的船舶的最大长度是多少?

解 如 1587 题图所示, BC 的长度为

$$l = \frac{a}{\sin\varphi} + \frac{b}{\cos\varphi},$$

$$\frac{dl}{d\varphi} = \frac{b\sin^3\varphi - a\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}.$$

$$\text{令 } \frac{dl}{d\varphi} = 0, \text{ 得 } \tan\varphi_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

$$\text{从而 } \sin\varphi_0 = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos\varphi_0 = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}},$$

$$\text{而 } \left. \frac{d^2l}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} = 3\left(\frac{b}{\cos\varphi_0} + \frac{a}{\sin\varphi_0}\right) > 0,$$

因此 $l(\varphi_0)$ 为最小值, 即船的长度不能超过

$$l(\varphi_0) = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

【1588】 船舶航行一昼夜的耗费由两部分组成: 固定部分等于 a 卢布, 变动部分与速度的立方成正比增加, 问船舶以怎样的速度 v 航行是最经济的?

解 设航行的全程为 s , 速度为 v , 则总耗费为

$$Q = (a + kv^3) \cdot \frac{s}{v} = \frac{as}{v} + skv^2,$$

$$\frac{dQ}{dv} = -\frac{as}{v^2} + 2skv.$$

令 $\frac{dQ}{dv} = 0$. 解之得 $v_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$. 显然当 $v \in (0, v_0)$ 时, $\frac{dQ}{dv} < 0$. 当 v

$> v_0$ 时, $\frac{dQ}{dv} > 0$. 所以 $Q(v_0)$ 为最小值. 即当船以速度 $v_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$

航行时最经济.

【1589】 位于粗糙水平面上的货物重量为 P , 要求用力将货物从原位置移动, 如果货物的摩擦系数为 k , 问作用力与水平面的倾角是多少能使所需的力是最小的?

解 设作用力 F 对水平面的倾角为 α , 则

$$F \cos \alpha = k(P - F \sin \alpha),$$

即
$$F = \frac{kP}{\cos \alpha + k \sin \alpha}.$$

令 $y = \cos \alpha + k \sin \alpha,$

要使 F 最小, 只要 y 最大

$$y'_\alpha = -\sin \alpha + k \cos \alpha.$$

令 $y'_\alpha = 0$, 解得

$$\alpha_0 = \arctan k,$$

又 $y''_\alpha|_{\alpha=\alpha_0} = -\cos \alpha_0 - k \sin \alpha_0 < 0,$

即当 $\alpha_0 = \arctan k$ 时, y 为最大, 从而 F 为最小力. 亦即此时最省力.

【1590】 在半径为 a 的半球形杯中放一根长度为 $l > 2a$ 的棒, 求棒的平衡位置.

解 取球心为坐标原点. 当 $2a < l \leq 4a$ 时, 设棒的重心竖坐标为 z , 棒对杯口所在平面 (xOy 平面) 的倾角为 φ , 则

$$z = -\left(2a \cos \varphi - \frac{l}{2}\right) \sin \varphi \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

当棒平衡时, z 最小. 因此求 z 的极值. 而

$$z'_\varphi = -4a \cos^2 \varphi + \frac{l}{2} \cos \varphi + 2a.$$

令 $z'_\varphi = 0$, 得

$$\cos \varphi = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a} \quad (\text{舍去负值}).$$

经检验知此时 y 为最小值. 因此当 $\cos \varphi = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a}$ 时棒取

平衡位置. 当 $l > 4a$ 时, 棒的重心在半球外, 此时棒失去平衡, 无平衡位置.

§ 14. 曲线相切. 曲率圆. 渐屈线

1. n 阶相切 有两曲线 $y = \varphi(x)$ 与 $y = \psi(x)$, 若在点 x_0 :
 $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0) (k = 0, 1, 2, \dots, n)$.

且 $\varphi^{(n+1)}(x_0) \neq \psi^{(n+1)}(x_0)$.

则称这两曲线在点 x_0 上有 n 阶相切(严格意义上讲!)

在这种情况下, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\varphi(x) - \psi(x) = O^*(x - x_0)^{n+1}$.

2. 曲率圆 圆周 $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2$ 与已知曲线 $y = f(x)$ 有不低于 2 阶的相切, 此圆称作在对应点的曲率圆.

这个圆的半径为 $R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$, 称作曲率半径; 而 $k = \frac{1}{R}$ 称为曲率.

3. 渐屈线 曲率圆中心 (ξ, η) (曲率中心)

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

的轨迹称作已知曲线 $y = f(x)$ 的渐屈线.

【1591】 选择直线 $y = kx + b$ 的参数 k 和 b , 使其与曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 2$ 有高于 1 阶的相切.

解 要使直线与曲线有高于一阶的相切, 必须有

$$(x^3 - 3x^2 + 2)'' = (kx + b)'' = 0,$$

即 $6x - 6 = 0$,

即 $x = 1$. 同时在 $x = 1$ 两个一阶导数也应相等, 即

$$(x^3 - 3x^2 + 2)'|_{x=1} = (kx + b)'|_{x=1}.$$

从而 $k = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$,

且当 $x = 1$ 时,

$$(-3x + b)|_{x=1} = (x^3 - 3x^2 + 2)|_{x=1},$$

即 $-3 + b = 0$,

$$b = 3,$$

因此, 所求直线为 $y = 3(1 - x)$.

【1592】 为使抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 在点 $x = x_0$ 与曲线 $y = e^x$ 有二阶的相切, 如何选择系数 a, b 和 c ?

解 要使 $y = ax^2 + bx + c$ 与 $y = e^x$ 在 x_0 处有二阶的相切, 则必须有

$$\begin{cases} ax_0 + bx_0 + c = e^{x_0}, \\ 2ax_0 + b = e^{x_0}, \\ 2a = e^{x_0}, \end{cases}$$

解之得 $a = \frac{1}{2}e^{x_0}, b = e^{x_0}(1 - x_0),$

$$c = e^{x_0}\left(1 - x_0 + \frac{x_0^2}{2}\right).$$

【1593】 下列曲线与 Ox 轴在点 $x = 0$ 处相切的阶是多少?

(1) $y = 1 - \cos x;$

(2) $y = \tan x - \sin x;$

(3) $y = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right).$

解 (1) $y' = \sin x, y'' = \cos x.$

于是 $y'|_{x=0} = 0, y''|_{x=0} = 1,$

而对于 Ox 轴, 其方程为 $y = 0.$ 故

$$y' = 0, y^{(n)} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

因此, 曲线 $y = 1 - \cos x$ 与 Ox 轴有一阶的相切.

(2) $y' = \sec^2 x - \cos x,$

$$y'' = 2\sec^2 x \tan x + \sin x,$$

$$y''' = 4\sec^2 x \tan^2 x + 2\sec^4 x + \cos x,$$

因而 $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = y''|_{x=0} = 0,$

$$y'''|_{x=0} = 3 \neq 0,$$

因此, 曲线 $y = \tan x - \sin x$ 与 Ox 轴有两阶的相切.

(3) $y' = e^x - (1 + x), y'' = e^x - 1, y''' = e^x,$

因而 $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = y''|_{x=0} = 0, y'''|_{x=0} \neq 0,$

因此, 曲线 $y = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$ 与 Ox 轴有两阶的相切.

【1594】 设曲线 $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ (当 $x \neq 0$) 及 $y = 0$ (当 $x = 0$). 证明: 曲线在点 $x = 0$ 同 Ox 轴相切的阶为无穷大.

证明 由 1225 题的结果知

$$y^{(n)}|_{x=0} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

即所给曲线在 $x = 0$ 点与 Ox 轴无穷阶相切.

【1595】 求出双曲线 $xy = 1$ 在下列各点的曲率半径和曲率中心: (1) $M(1, 1)$; (2) $N(100, 0.01)$.

解 $y = \frac{1}{x}, y' = -\frac{1}{x^2}, y'' = \frac{2}{x^3}.$

(1) 在点 $M(1, 1)$,

$$y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = -1, y''|_{x=1} = 2.$$

于是曲率半径为

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{[1 + (-1)^2]^{\frac{3}{2}}}{2} = \sqrt{2},$$

曲率中心 (ξ, η) 为

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} = 1 - \frac{-1(1 + 1)}{2} = 2,$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = 1 + \frac{2}{2} = 2,$$

(2) 在点 $N(100, 0.01)$ 有

$$y|_{x=100} = 0.01, y'|_{x=100} = -0.0001,$$

$$y''|_{x=100} = 2 \times 10^{-6}.$$

于是曲率半径为

$$R = \frac{[1 + (10^{-4})^2]^{\frac{3}{2}}}{2 \times 10^{-6}} \approx 5 \times 10^5,$$

$$\begin{aligned} \xi &= x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} \\ &= 100 + \frac{10^{-4}(1 + 10^{-8})}{2 \times 10^{-6}} \approx 150, \end{aligned}$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = 10^{-2} + \frac{1 + 10^{-8}}{2 \times 10^{-6}} \approx 5 \times 10^5.$$

求下列曲线的曲率半径(1596 ~ 1602).

【1596】 抛物线 $y^2 = 2px$.

解 $y' = \frac{p}{y}, y'' = -\frac{p}{y^2}y' = -\frac{p^2}{y^3}.$

于是, 曲率半径为

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{p^2}{y^3}\right|} = \frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

$$= p\left(1+\frac{y^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}} = p\left(1+\frac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

【1597】 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a \geq b > 0)$.

解 不妨设 $a > b$, 则

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, y'' = -\frac{b^2}{a^2 y} + \frac{b^2 x}{a^2 y^2} y' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

于是曲率半径为

$$R = \frac{\left(1+\frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2 |y|^3}} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}$$

$$= \frac{(a^4 b^2 - a^2 b^2 x^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}$$

$$= \frac{a^3 b^3 \left(a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{(a^2 - \epsilon^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

其中 $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率.

【1598】 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解 $y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}, y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$

于是曲率半径为

$$R = \frac{\left(1+\frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2 |y|^3}} = \frac{(a^2 b^2 x^2 - a^4 b^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}$$

$$= \frac{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2} - a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{(\epsilon x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

其中 $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ 为双曲线的离心率.

【1599】 内摆线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

解 $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}, y'' = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}.$

于是曲率半径为

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}\right|} = \left|\frac{\frac{a}{x}}{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}}\right| = 3|axy|^{\frac{1}{3}}.$$

【1600】 椭圆 $x = a\cos t, y = b\sin t$.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t,$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{b}{a}\left(1 - \frac{1}{\sin^2 t}\right)}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

于是曲率半径为

$$\begin{aligned} R &= \frac{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\cot^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b}{a^2|\sin^3 t|}} = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab} \\ &= \frac{a^3\left(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{a^2}{b}(1 - \epsilon^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

其中 $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率.

【1601】 摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1 - \cos t)} = \cot \frac{t}{2},$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(\cot \frac{t}{2}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{-1}{2\sin^2 \frac{t}{2}}}{a(1 - \cos t)} = \frac{1}{4a\sin^4 \frac{t}{2}}.$$

于是曲率半径为

$$\begin{aligned} R &= \frac{(1 + y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}{|y''_x|} = \frac{\left(1 + \cot^2 \frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4a\sin^4 \frac{t}{2}}} = 4a \left|\sin \frac{t}{2}\right| \\ &= 4a \sqrt{\frac{y}{2a}} = 2\sqrt{2ay}. \end{aligned}$$

【1602】 圆的渐伸线 $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$.

解 $\frac{dy}{dx} = \tan t, \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{at \cos t} = \frac{1}{at \cos^3 t}.$

曲率半径为

$$R = \frac{(1 + \tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{|\sec^3 t|}{a|t|}} = a|t|.$$

【1603】 证明: 二次曲线 $y^2 = 2px - qx^2$ 的曲率半径与法线段的立方成比例.

证明 曲线的曲率半径为

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|},$$

而法线段的长为

$$l = |y| \sqrt{1 + y'^2},$$

因此 $\frac{R}{l^3} = \frac{1}{|y^3 y''|}.$

下面求 $y^3 y''$. 因为

$$y^2 = 2px - qx^2,$$

上式两边对 x 求两次导数得

$$yy' = p - qx \quad yy'' + y'^2 = -q,$$

上式乘以 y^2 , 并将 $yy' = p - qx$ 代入得

$$y^3 y'' + (p - qx)^2 = -q(2px - qx)^2,$$

化简得 $y^3 y'' = -p^2$,

因此
$$\frac{R}{l^3} = \frac{1}{|y^3 y''|} = \frac{1}{p^2},$$

为一常数.

【1604】 写出用极坐标表示的曲线的曲率半径公式.

解 设曲线的极坐标方程为 $r = r(\varphi)$, 则由

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi.$$

有
$$\frac{dy}{dx} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^3},$$

其中 $r' = \frac{dr}{d\varphi}, r'' = \frac{d^2 r}{d\varphi^2}.$

于是曲率半径为

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2 y}{dx^2}\right|} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}.$$

求下列用极坐标表示的曲线的曲率半径(参数是正数)(1605 ~ 1608).

【1605】 阿基米德螺线 $r = a\varphi$.

解 因为 $r' = a, r'' = 0$,

于是曲率半径为

$$R = \frac{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2a^2}.$$

【1606】 对数螺线 $r = ae^{m\varphi}$.

解 $r' = ma e^{m\varphi} = nr, r'' = m^2 a e^{m\varphi} = m^2 r$,

所以曲率半径为

$$R = \frac{(r^2 + m^2 r^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2 + 2m^2 r^2 - m^2 r^2|}$$

$$= \frac{r^3(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2(1+m^2)} = r\sqrt{1+m^2}.$$

【1607】 心脏形线 $r = a(1 + \cos\varphi)$.

解 $r' = -a\sin\varphi, r'' = -a\cos\varphi$,

于是曲率半径为

$$R = \frac{[a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}{a^2(1+\cos\varphi)^2 + 2a^2\sin^2\varphi + a^2\cos\varphi(1+\cos\varphi)}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}a^3(1+\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{3a^2(1+\cos\varphi)} = \frac{2}{3}\sqrt{2ar}.$$

【1608】 双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

解 $r' = -\frac{a^2\sin 2\varphi}{r}$,

$$r'' = -\frac{2a^2\cos\varphi \cdot r - a^2\sin 2\varphi r'}{r^2} = -\frac{r^4 + a^4}{r^3},$$

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = \frac{3a^4}{r^2}, (r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^6}{r^3},$$

所以, 曲率半径为

$$R = \frac{\frac{a^6}{r^3}}{\frac{3a^4}{r^2}} = \frac{a^2}{3r}.$$

【1609】 在曲线 $y = \ln x$ 上求出曲率最大的点.

解 $y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$,

所以曲率半径为

$$R = \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{|x|}.$$

要求曲率最大的点, 只须求函数

$$f(x) = \frac{(1+x^2)^3}{x^2},$$

的最小值点.

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2)^2(2x^2-1)}{x^3},$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 及 $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (不在函数的定义域内舍去)

当 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $f'(x) < 0$.

当 $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$, $f'(x) > 0$.

因此, 当 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $f(x)$ 取最小值.

所以, 当 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{\ln 2}{2}$, 曲率半径为最小, 亦即曲率为最大.

因此, 所求的点为 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\ln 2}{2})$.

【1610】 三次抛物线 $y = \frac{kx^3}{6}$ ($0 \leq x < +\infty, k > 0$) 的最大曲率等于 $\frac{1}{1000}$, 求出达到这个最大曲率的点.

解 为方便起见, 设 $c = \frac{k}{6}$. 因为

$$y' = 3cx^2, y'' = 6cx,$$

所以, 曲率为

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6cx}{(1+9c^2x^4)^{\frac{3}{2}}} (x \geq 0),$$

$$\frac{dK}{dx} = 6c \frac{\sqrt{1+9c^2x^4}(1-45c^2x^4)}{(1+9c^2x^4)^3}.$$

令 $\frac{dK}{dx} = 0$ 得 $x_0^4 = \frac{1}{45c^2}$ ($x_0 > 0$).

当 $0 < x < x_0$ 时, $\frac{dk}{dx} > 0$.

当 $x_0 < x < +\infty$ 时, $\frac{dk}{dx} < 0$.

所以, $K(x_0)$ 为 $K(x)$ 的最大值.

根据条件有

$$K(x_0) = \frac{6c \sqrt[4]{\frac{1}{45c^2}}}{\left(1 + 9c^2 \cdot \frac{1}{45c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6\sqrt{c} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{45}}}{\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{10^3},$$

解之得 $c = \frac{18\sqrt{5}}{5^3 \times 10^6}.$

从而 $x_0^2 = \frac{1}{\sqrt{45c}} = \frac{5^2 \times 10^6}{54},$

即 $x_0 = \frac{5 \times 10^3}{3\sqrt{6}}.$

写出下列各曲线的渐屈线方程(1611 ~ 1615).

【1611】 抛物线 $y^2 = 2px$ 的渐屈线.

解 因为

$$y' = \frac{p}{q}, y'' = -\frac{p^2}{y^3},$$

故曲率中心坐标为

$$\begin{aligned} \xi &= x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x + \frac{\frac{p}{y} \left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)}{\frac{p^2}{y^3}} \\ &= x + \frac{y^2 + p^2}{p} = x + \frac{2px + p^2}{p} = 3x + p, \\ \eta &= y + \frac{1+y'^2}{y''} = y - \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{\frac{p^2}{y^3}} = -\frac{y^3}{p^2}, \end{aligned}$$

即 $x = \frac{\xi - p}{3}, y^3 = -p^2 \eta.$

由抛物线方程有

$$y^6 = (2p)^3 x^3,$$

所以渐屈线方程为

$$(-p^2 \eta)^2 = (2p^3) \cdot \left(\frac{\xi - p}{3}\right)^3.$$

整理得 $27p\eta^2 = 8(\xi - p)^3$.

【1612】 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐屈线.

解 $y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$

故曲率中心坐标为

$$\begin{aligned}\xi &= x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x - \frac{\frac{b^2 x}{a^2 y} \left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)}{\frac{b^4}{a^2 y^3}} \\ &= x - \frac{x(a^4 y^2 + b^4 x^2)}{a^4 b^2} = x - \frac{x \left(a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2\right)}{a^2} \\ &= \frac{c^2}{a^4} x^3 \quad (c^2 = a^2 - b^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta &= y + \frac{1+y'^2}{y''} = y - \frac{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}}{\frac{b^4}{a^2 y^3}} \\ &= y - \frac{y(a^4 y^2 + b^4 x^2)}{a^2 b^4} = y - \frac{y a^2 b^2 \left(b^2 + \frac{c^2}{b^2} y^2\right)}{a^2 b^4} \\ &= -\frac{c^2}{b^4} y^3 \quad (c^2 = a^2 - b^2),\end{aligned}$$

即 $c^2 x^3 = a^4 \xi, c^2 y^3 = -b^4 \eta.$

于是 $x^2 = \frac{a^{\frac{8}{3}} \xi^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}, y^2 = \frac{b^{\frac{8}{3}} \eta^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}},$

代入椭圆方程, 即得渐屈线方程为

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}},$$

其中 $c^2 = a^2 - b^2$, 这是一内摆线

【1613】 内摆线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 的渐屈线.

解 $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}, y'' = \frac{1}{3}a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{1}{3}}.$

故曲率中心坐标为

$$\begin{aligned}\xi &= x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x + \frac{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}} \\ &= x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta &= y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}} \\ &= y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\xi + \eta &= x + y + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}) \\ &= (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}) \\ &= (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi - \eta &= (x - y) - 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}) \\ &= (x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}) \\ &= (x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})^3,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}(\xi + \eta)^{\frac{2}{3}} + (\xi - \eta)^{\frac{2}{3}} &= (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^2 + (x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})^2 \\ &= 2(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}) = 2a^{\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

这就是所求渐屈线方程, 它仍是一内摆线.

【1614】 曳物线 $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ 的渐屈线.

解 曳物线方程

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

两边对 x 求导数得

$$1 = a \left(\frac{1}{a + \sqrt{a^2 - y^2}} \cdot \frac{-yy'}{\sqrt{a^2 - y^2}} - \frac{y'}{y} \right) + \frac{yy'}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

化简整理得

$$y' = -\frac{4}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

则

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{y'}{\sqrt{a^2 - y^2}} - \frac{y^2 y'}{(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{a^2 y'}{(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2 y}{(a^2 - y^2)^2}, \end{aligned}$$

所以曲率中心的坐标为

$$\begin{aligned} \xi &= x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} \\ &= x + \frac{\frac{y}{(1 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{y^2}{a^2 - y^2} \right)}{\frac{a^2 y}{(a^2 - y^2)^2}} \\ &= x + \sqrt{a^2 - y^2}, \\ \eta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''} = y + \frac{\frac{a^2}{a^2 - y^2}}{\frac{a^2 y}{(a^2 - y^2)^2}} = \frac{a^2}{y}, \end{aligned}$$

由于 x, y 满足方程

$$x + \sqrt{a^2 - y^2} = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y},$$

故

$$\xi = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y},$$

即

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} = e^{\frac{\xi}{a}}. \quad \textcircled{1}$$

将 ① 式分子有理化得

$$\frac{a^2 - (a^2 - y^2)}{y(a - \sqrt{a^2 - y^2})} = e^{\frac{\xi}{a}},$$

$$\text{即} \quad \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} = e - \frac{\xi}{a}. \quad (2)$$

① + ② 并除以 2 得

$$\frac{a}{y} = ch \frac{\xi}{a},$$

$$\text{从而得} \quad \eta = ach \frac{\xi}{a}.$$

这就是所求的渐屈线方程, 它是一悬链线.

【1615】 对数螺线 $r = e^{m\varphi}$ 的渐屈线.

解 对数螺线的极坐标方程化为直角坐标方程得

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln a + m \arctan \frac{y}{x},$$

两边对 x 求导数得

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{m(xy' - y)}{x^2 + y^2},$$

$$\text{即} \quad x + yy' = m(xy' - y). \quad (1)$$

由 ① 式解得

$$y' = \frac{x + my}{mx - y},$$

① 式两边再对 x 求导, 并化简得

$$y'' = \frac{1 + y'^2}{mx - y},$$

所以, 曲率中心的坐标为

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} = -my,$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = mx.$$

$$\text{设} \quad p = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \varphi = \arctan \frac{\eta}{\xi},$$

$$\text{而} \quad \xi^2 + \eta^2 = m^2(x^2 + y^2), \frac{\eta}{\xi} = -\frac{y}{x},$$

即 $p = mr, \varphi = 4 - \frac{\pi}{2},$

因此有 $p = mr = ma \cdot e^{m\varphi} = ma e^{m(\varphi - \frac{\pi}{2})}$

即 $p = ma e^{m(\varphi - \frac{\pi}{2})}.$

这就是所求渐屈线的方程,它也是一对数螺线.

【1616】 证明:摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 的渐屈线仍然是一根摆线,仅仅是其位置和已知摆线不同.

解 $y' = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \cot \frac{t}{2}, y'' = -\frac{1}{4a \sin^3 \frac{t}{2}}.$

于是曲率中心坐标为

$$\begin{aligned} \xi &= x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} \\ &= a(t - \sin t) + \frac{\cot \frac{t}{2} \left(1 + \cot^2 \frac{t}{2}\right)}{\frac{1}{4a \sin^3 \frac{t}{2}}} = a(t + \sin t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''} = a(1 - \cos t) + \frac{1 + \cot^2 \frac{t}{2}}{\frac{1}{4a \sin^3 \frac{t}{2}}} \\ &= a(\cos t - 1). \end{aligned}$$

令 $u = t - \pi$ 得

$$\xi = \pi a + a(u - \sin u),$$

$$\eta = -2a + a(1 - \cos u).$$

这仍是一摆线,只是其位置与原摆线的位置不同.

§ 15. 方程的近似解法

1. 比例法(弦位法)

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内是连续的且 $f(a)f(b) < 0$,

当 $a < x < b$ 时, $f'(x) \neq 0$, 则方程

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

在区间 (a, b) 内有且仅有一个实根 ξ . 取下值作为此根的第一近似值:

$$x_1 = a + \delta_1,$$

$$\text{其中 } \delta_1 = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a),$$

然后把此方法用于函数 $f(x)$ 在其两端异号的区间 (a, x_1) 或 (x_1, b) 中的那一区间, 得到根 ξ 的第二近似值 x_2 . 以此类推, 对于第 n 次近似值 x_n , 下列公式是正确的:

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad (2)$$

其中 $m = \inf_{a < x < b} |f'(x)|$, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi.$$

2. 牛顿法(切线法)

如果在闭区间 $[a, b]$ 上 $f''(x) \neq 0$ 且 $f(a)f''(a) > 0$, 则可取数值

$$\xi_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

作为方程 (1) 的根 ξ 的第一近似值 ξ_1 .

重复运用这一方法, 很快就得出趋近于根 ξ 的一系列近似值 $\xi_n (n = 1, 2, \dots)$, 这些近似值的精确性可按照公式 (2) 来估计.

为了粗略地确定方程的根, 最好作出函数 $y = f(x)$ 的略图.

运用比例法, 求下列方程的根(精确到 0.001).

【1617】 $x^3 - 6x + 2 = 0.$

解 设 $f(x) = x^3 - 6x + 2$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $f(0) = 2, f(1) = -3$, 且当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 6 \neq 0$. 因而所给方程在 $(0, 1)$ 内恰有一实根 ξ . 现求其近似值, 以 x_i 表示此根的第 i 次近似值, 则有

$$x_1 = 0 + \delta_1 = -\frac{f(0)}{f(1) - f(0)}(1 - 0) = 0.4,$$

又 $f(0.4) = -0.336,$

故 $x_2 = -\frac{f(0)}{f(0.4) - f(0)}(0.4 - 0) = 0.342,$

$$f(0.342) = -0.012,$$

故 $x_3 = -\frac{f(0)}{f(0.342) - f(0)}(0.342 - 0) = 0.340.$

由于 $f(0.340) = -0.001,$

$$m_1 = \inf_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)| = 3.$$

如果取 x_3 作 ξ_1 的近似值, 则其误差为

$$|0.340 - \xi_1| \leq \frac{|f(0.340)|}{m_1} < 0.001,$$

已达到所需要的精确度, 于是, 所给方程的一近似根为 0.340.

又 $f(2) = -2, f(3) = 11$. 且当 $2 < x < 3$ 时 $f'(x) \neq 0$, 故方程在 $(2, 3)$ 内恰有一实根 ξ_2 . 运用上面的方法可求得满足精度要求的 ξ_2 的近似值为

$$\xi_2 \approx 2.262.$$

再求第三个根, 因为 $f(-2) = 6, f(-3) = -7$, 故在 $(-3, -2)$ 内, 方程恰有一根 ξ_3 . 同样可求出 ξ_3 近似值为

$$\xi_3 \approx -2.602.$$

【1618】 $x^4 - x - 1 = 0.$

解 设

$$f(x) = x^4 - x - 1.$$

则 $f'(x) = 4x^3 - 1,$

令 $f'(x) = 0,$

解得 $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$

当 $-\infty < x < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 单调减少.

当 $\frac{1}{\sqrt[3]{4}} < x < +\infty$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 单调增加.

而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = \frac{1}{4^{\frac{4}{3}}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - 1 < 0,$$

故方程有两个根, 一个位于 $(-\infty, \frac{1}{\sqrt[3]{4}})$, 一个位于 $(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, +\infty)$.

由于 $f(1) = -1$, $f(2) = 13$, 且当 $1 < x < 2$ 时, $f'(x) \neq 0$, 故所给方程在 $(1, 2)$ 内恰有一根 ξ_1 , 按 1617 题的方法可求得满足精度要求的近似值为 $\xi_1 \approx 1.221$.

又 $f(-1) = 1$, $f(0) = -1$, 且当 $-1 < x < 0$ 时 $f'(x) \neq 0$. 故方程有 $(-1, 0)$ 内恰有一实根 ξ_2 , 同样可求得 ξ_2 的近似值为 $\xi_2 \approx -0.724$.

【1619】 $x - 0.1 \sin x = 2$.

解 设 $f(x) = x - 0.1 \sin x - 2$,

因为 $f'(x) = 1 - 0.1 \cos x > 0$,

故应在 $(-\infty, +\infty)$ 内严格单调增加, 而

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

故原方程恰有一实根, 又

$$f(2) = -0.1 \sin 2 = -0.091,$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) \approx 0.0237.$$

故方程仅有的一实根位于 $(2, \frac{2\pi}{3})$, 应用比例法, 可求得方程的根 ξ 的近似值为 $\xi = 2.087$ (弧度).

【1620】 $\cos x = x^2$.

解 设 $f(x) = \cos x - x^2$, 因为 $f(-x) = f(x)$, 故若方程有一个根 ξ , 则方程必有另一根 ξ_0 . 故我们只须考虑 $x \geq 0$ 的情形, 又

$$f'(x) = -\sin x - 2x < 0 (x > 0).$$

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少, 而

$$f(0) = 1 > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

故原方程恰有一正根 ξ , 又

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.09, f(1) = -0.46,$$

故方程唯一的正根 $\xi \in \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$, 利用 1617 题中的方法可求得 ξ 的近似值为 $\xi \approx 0.825$.

因此, 所给方程的两个近似根为 ± 0.825

运用牛顿法, 以指定的精确度求出以下方程的根:

【1621】 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10x$ (精确到 10^{-3}).

解 曲线 $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ 与 $y = 10x$ 有两个交点, 因此, 所给方

程有两个根, 设 $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 10x$, 则

$$f(0.4) = 2.41, f(0.5) = -0.75,$$

且在 $[0.4, 0.5]$ 内

$$f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4} \neq 0, f(0.4)f''(0.4) > 0,$$

故所给方程在 $(0.4, 0.5)$ 内恰有一实根, 并可利用牛顿法求近似根, 其切点取为 $(0.4, f(0.4))$. 依次求得其各次近似值为

$$x_1 = 0.4 - \frac{f(0.4)}{f'(0.4)} = 0.459,$$

$$x_2 = 0.459 - \frac{f(0.459)}{f'(0.459)} = 0.471,$$

$$x_3 = 0.471 - \frac{f(0.471)}{f'(0.471)} = 0.472.$$

而 $f(x_3) = f(0.472) = -0.013$,

$$m = \inf_{0.4 \leq x \leq 0.5} |f'(x)| = |f'(0.5)| = 25,$$

故 $|x_3 - \xi| \leq \frac{|f(0.472)|}{m} < 0.001,$

故所给方程的一个近似根为 0.472.

现求第二近似根, 由于 $f(10) = 0.001$. 故此根可能靠近 10, 而 $f(9.9) = -0.98$. 而在 $(9.9, 10)$ 内 $f'(x) \neq 0$, 故方程在 $(9.9, 10)$ 内恰有一个根 ξ_1 . 又 $f(10)f''(10) > 0, f''(x) \neq 0$, 故应用牛顿法求近似根时, 切点应选在 $(10, f(10))$ 处, 于是

$$x_1 = 10 - \frac{f(10)}{f'(10)} = 9.9999,$$

而 $m = \inf_{9.9 \leq x \leq 10} |f'(x)| = |f'(9.9)| \geq 8,$

故 $|x_1 - \xi_1| \leq \frac{|f(x)_1|}{m} < 0.0001.$

因此, 选取 x_1 作为 ξ_1 的近似值已达到精度要求. 故原方程的另一根的近似值为 $\xi_1 \approx 9.9999$.

【1622】 $x \lg x = 1$ (精确到 10^{-4}).

解 设 $f(x) = x \lg x - 1$.

则 $f'(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln 10},$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{e}.$

故当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $\frac{1}{e} < x < +\infty$, $f'(x) > 0$,

又 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \lg \frac{1}{e} - 1 < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -1 < 0.$

故原方程只有一根且位于 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 内, 又 $f(2.506) = -0.0002, f(2.507) = 0.0006$, 且当 $2.506 < x < 2.507$ 时, $f'(x) > 0$. 故方程的唯一根在 $(2.506, 2.507)$ 内, 应用牛顿法, 切

点选在 $(2.507, f(2.507))$. 依次计算各次近似值得

$$x_1 = 2.507 - \frac{f(2.507)}{f'(2.507)} \approx 2.5064,$$

$$x_2 = 2.5062,$$

由于 $f(2.5062) = 0.000013$,

$$\begin{aligned} m &= \inf_{2.505 \leq x \leq 2.507} |f'(x)| \\ &= |f'(2.506)| = 0.83, \end{aligned}$$

故如果取 2.5062 作为根的近似值, 其误差为

$$|2.5062 - \xi| \leq \frac{|f(2.5062)|}{m} < 0.0001.$$

已达到所需精度. 故方程根的近似值为 $\xi \approx 2.5062$.

【1623】 $\cos x \cdot \operatorname{ch} x = 1$ (精确到 10^{-3}) (对于正根).

解 曲线 $y = \cos x$ 与 $y = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ 有无穷多个交点, 其中最小的三个正根, 分别记为 α, β, γ , 且

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi, 2\pi < \beta < \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} < \gamma < 4\pi,$$

利用牛顿法可算得 $\alpha \approx 4.7301, \gamma \approx 10.9956$.

【1624】 $x + e^x = 0$ (精确到 10^{-5}).

解 设 $f(x) = x + e^x$.

则 $f'(x) = 1 + e^x > 0, f''(x) = e^x > 0$,

且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$,

故方程有且只有一实根.

由于 $f(0) = 1, f(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$,

故方程的唯一实根位于 $(-1, 0)$ 内, 应用牛顿法, 切点应选在 $(0, 1)$ 处, 依次求得根的各次近似值为

$$x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = -\frac{1}{2} = -0.5,$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0.56631,$$

$$x_3 = -0.567132 \quad x_4 = -0.567145.$$

由于 $|x_4 - \xi| \leq \frac{|f(-0.567145)|}{m}$

$$= \frac{|f(-0.567145)|}{1 + e^{-1}} = 1.96 \times 10^{-6} < 10^{-5},$$

故取 $\xi = -0.567145$, 即可保证所需的精度.

【1625】 $x \operatorname{th} x = 1$ (精确到 10^{-6}).

解 在 $x \operatorname{th} x$ 中以 $-x$ 代替 x , 其值不变, 故若方程有根 ξ , 则 $-\xi$ 也必为其根. 因此, 我们只须讨论 $x > 0$ 的情况

设 $f(x) = \operatorname{th} x - \frac{1}{x},$

则 $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{x^2} > 0.$

又 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$

故方程有唯一的正实根. 又

$$f(1) = -0.2384, f(2) = 0.4640,$$

所以方程唯一的正根 $\xi \in (1, 2)$. 又

$$f''(x) = -\frac{2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} - \frac{3}{x^3} < 0 (x > 0),$$

故应用牛顿法切点应选在 $(1, f(1))$. 应用牛顿法求各次近似根得

$$x_1 = 1.168, x_2 = 1.1989, x_3 = 1.1996781.$$

而 $m = \inf_{1 \leq x \leq 2} |f'(x)| = |f'(2)| = 0.36,$

故 $|x_3 - \xi| \leq \frac{|f(x_3)|}{m} < 10^{-6},$

因而 $\xi \approx 1.1996781$.

于是可取 ± 1.1996781 为方程的近似根.

【1626】 求出方程 $\tan x = x$ 的前三个正根 (精确到 0.001).

解 由 $y = \tan x$ 及 $y = x$ 的图形知, 方程有无穷多个根, 其

三个最小的正根 α, β, γ 满足

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}, 2\pi < \beta < \frac{5\pi}{2}, 3\pi < \gamma < \frac{7\pi}{2},$$

应用牛顿法, 可求得它们的近似值分别为

$$\alpha \approx 4.493, \beta \approx 7.725, \gamma \approx 10.9041.$$

它们的求法只是利用牛顿迭代公式并估计误差. 我们这里不将其计算列出来. 有兴趣的同学可利用计算机编程来计算.

【1627】 求出方程 $\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$ 的两个正根 (精确到 10^{-3}).

解 由 $y = \cot x$ 与 $y = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$ 的图形知方程有无穷多个根, 其两个最小正根 α, β 满足

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi.$$

利用牛顿法可求得它们的近似值分别为

$$\alpha \approx 2.0816, \beta \approx 5.9404.$$

它们的求法只是利用牛顿迭代公式并估计误差. 我们这里不将其计算列出来. 有兴趣的同学可利用计算机编程来计算.